N° 3. SÉRIE III. — 1re ANNÉE. Mars 1900.

BULLETIN DES SÉANCES

DE LA

SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE NANCY

ET DE LA

RÉUNION BIOLOGIQUE DE NANCY

Sur l'éclipse de soleil du 28 mai 1900[1], par M. G. Floquet.

La dernière éclipse totale de soleil dont la phase totale ait été visible *à Nancy* est celle du 22 mai 1724, qui fut observée à Trianon par Maraldi et Jacques Cassini. Un phénomène aussi grandiose et aussi rare a dû laisser des traces dans nos écrits d'histoire locale. J'en ai trouvé une description sommaire, mais très nette, dans le *Journal du libraire Nicolas,* récemment découvert par M. Pfister, et qui va être publié incessamment dans les *Mémoires de la Société d'archéologie lorraine.* Le libraire Nicolas vivait à Nancy au commencement du XVIIIe siècle; il notait avec soin, jour par jour, les événements qui se produisaient dans notre ville; il n'avait pu omettre l'éclipse totale. Effectivement, voici ce qu'on lit dans son précieux journal : « Le 22 may, il y eut une éclipse qui n'a peut-être pas eu sa pareille à Nancy depuis plus d'un siècle. Elle commença un peu avant 6 heures du soir. La lune entra par le bas du soleil vers la droite. De là elle s'avança sensiblement sur le soleil, en sorte que, peu après 6 heures, tout le monde put aisément s'en apercevoir. L'éclipse crut pendant près

1. Communication faite à la Société des sciences le 1er mars.

d'une heure et, un peu avant 7 heures, le soleil fut entièrement éclipsé. On commença à sentir un petit froid. Le ciel et la Terre ne parurent plus éclairés que d'une lumière triste et lugubre ; on ne pouvait lire sans chandelles ; les étoiles et les planètes parurent. Ce spectacle ne dura que deux minutes ; après quoy la lumière du soleil commença à paraître avec une vitesse prodigieuse, semblable à un éclair. L'éclipse finit à 7 heures trois quarts, quelques minutes avant le coucher du soleil. »

Quant à la dernière éclipse de soleil visible totalement *en France,* elle date du 8 juillet 1842. La zone de totalité passait sur Perpignan, Foix, Carcassonne, Montpellier, Marseille, Toulon, Avignon, Draguignan, Gap, Digne, etc. Perpignan se trouvait, à très peu près, sur la ligne centrale, et l'éclipse y fut observée par Arago, qui nous a donné les plus grands détails à son sujet, sans négliger de nous dépeindre l'impression profonde qu'elle produisit sur les populations [1].

Depuis le 8 juillet 1842, la France a vu une éclipse annulaire, celle du 9 octobre 1847, qui a été annulaire pour Paris, le Havre, Lille, Auxerre, Besançon, *Nancy* [2], etc.; elle a vu un bon nombre de fois le soleil éclipsé partiellement, quelquefois même (antérieurement à 1871) avec une phase vraiment belle, comme le 15 mars 1858, le 18 juillet 1860, le 22 décembre 1870, où les portions recouvertes du diamètre solaire ont atteint respectivement 90, 85 et 83 centièmes de ce diamètre. Mais jeudi prochain, il y aura cinquante-sept ans et huit mois que notre pays n'aura assisté à une éclipse totale ; on constate même que, depuis le 22 décembre 1870, il n'a assisté à aucune éclipse un peu importante, aucune n'ayant dépassé la moitié du diamètre solaire.

Au point de vue des éclipses totales de soleil, le XIX^e^ siècle va finir pour nous dans les mêmes conditions, car l'année 1900 est dépourvue d'éclipse visible totalement en France. Seulement, *le 28 mai prochain,* le soleil s'éclipsera complètement non loin de nous, en Portugal, en Espagne, en Algérie, en Tunisie ; de plus, la phase visible en France sera très importante dans le Midi et encore très notable à Nancy. Si donc l'éclipse du 28 mai 1900 ne

1. Arago, tome IV des *Notices scientifiques* et tome III de l'*Astronomie populaire.*

2. A Nancy, d'épais nuages ont entièrement masqué cette éclipse, qui prit sa forme annulaire le matin, vers 8 heures; on a seulement constaté un affaiblissement considérable du jour. A Strasbourg, le phénomène put être observé par l'abbé Aoust.

nous fait pas jouir sur place des spectacles si intéressants de la totalité, du moins elle mettra fin pour nous à une série d'éclipses faibles.

I

1. La région (R) du Globe qui, le 28 mai, verra une éclipse à un degré quelconque, soit totale, soit partielle, soit pendant toute sa durée, soit pendant une fraction seulement de cette durée, est limitée par les quatre courbes AA′, BB′, AMB, A′M′B′, indiquées sur la figure 1.

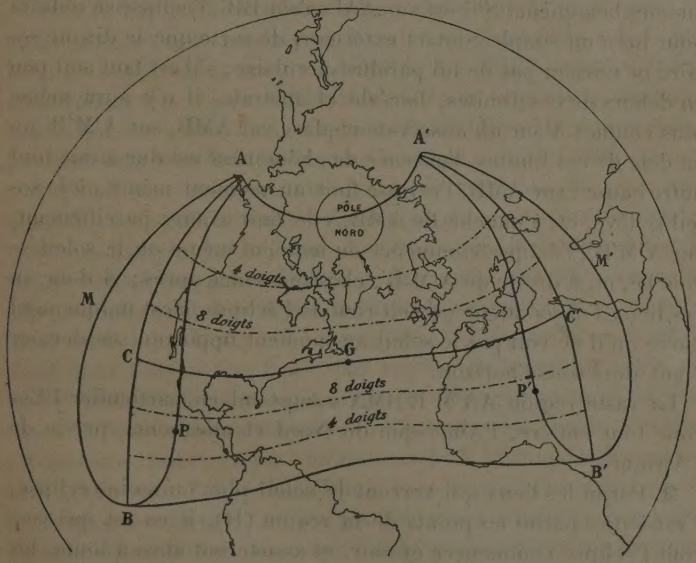


FIGURE 1.

La limite boréale AA′ prend naissance en un point A, situé sur la mer de Béring, un peu au nord de la presqu'île d'Alaska, traverse le territoire d'Alaska, puis les régions polaires, en passant à moins de 1°,5 du pôle, et vient finir en un point A′ du centre de la Sibérie, dans l'Iéniséï.

La limite australe BB′ part d'un point B situé sur l'océan Pacifique, à l'ouest de Lima, par 103° environ de longitude ; elle tra-

verse la République de l'Équateur, les États-Unis de Colombie, le Vénézuela, puis franchit l'Atlantique, coupe la pointe sud de la Guinée supérieure et vient finir en B', sur terre africaine, non loin de Brazzaville, après avoir traversé le golfe de Guinée.

La limite occidentale AMB est tout entière sur l'océan Pacifique.

La limite orientale A'M'B' traverse la mer d'Aral, la Perse, le fond du golfe Persique, l'Arabie, la mer Rouge, l'Abyssinie, le Congo.

Un observateur placé à l'intérieur de la région ainsi délimitée verra quelque chose en fait d'éclipse ; placé ailleurs, il ne verra aucun phénomène. S'il est sur AA' ou sur BB', l'éclipse se réduira pour lui à un simple contact extérieur, de sorte que le disque solaire ne cessera pas de lui paraître circulaire ; s'il est tant soit peu en dehors de ces limites, boréale et australe, il n'y aura même plus contact. Pour un observateur placé sur AMB, sur A'M'B' ou au delà de ces limites, l'absence de phénomène est due à une tout autre cause : sur AMB, l'éclipse finit au moment même où le soleil se lève, et, à gauche de AMB, elle finit avant ; pareillement, sur A'M'B', l'éclipse commence au moment même où le soleil se couche, et, à droite de A'M'B', elle commence après ; si donc en ces lieux l'observateur ne voit rien de l'éclipse, c'est uniquement parce qu'il ne voit pas le soleil au moment opportun, ce dernier étant alors sous l'horizon.

La vaste région AA'M'B'BMA comprend en particulier l'Europe tout entière, l'Amérique du Nord et une bonne partie de l'Afrique.

2. Parmi les lieux qui verront le soleil plus ou moins éclipsé, c'est-à-dire parmi les points de la région (R), il en est qui verront l'éclipse commencer et finir, et assisteront ainsi à toutes les phases du phénomène ; mais il en est d'autres qui, en raison du lever trop tardif ou du coucher trop hâtif du soleil, ne verront que la fin ou le commencement de l'éclipse. La région (R) se divise par là en trois parties. Que l'on trace les deux lignes APB et A'P'B' représentant, la première, le lieu des points où l'éclipse commence au lever du soleil, la seconde, le lieu des points où l'éclipse finit au coucher du soleil, et on obtiendra les trois aires suivantes :

1° La partie Ouest AMBPA, que j'appelle (S), où on ne voit pas

l'échancrure commencer : quand le soleil se lève, son disque est déjà entamé et on assiste seulement à la fin du phénomène.

2° La partie Est A'M'B'P'A', que j'appelle (S'), où on ne voit pas l'échancrure finir : quand le soleil se couche, son disque est encore entamé et on a assisté seulement au commencement du phénomène.

3° La partie médiane APBB'P'A', où on voit l'échancrure commencer et finir en assistant à toutes les phases du phénomène.

3. On peut encore subdiviser, et, sur la figure 1, on a séparé dans les aires (S) et (S') les points qui voient la phase maximum de l'éclipse de ceux qui ne la voient pas. Soient respectivement ACB et A'C'B' les lieux géométriques des points pour lesquels la phase maximum se produit au lever et au coucher du soleil : les localités appartenant aux aires ACBPA, A'C'B'P'A', comme celles appartenant à la région APBB'P'A', verront la phase maximum, tandis que les autres localités de la région (R) ne la verront pas, le soleil étant sous leur horizon au moment où elle a lieu.

4. Quels sont maintenant les points de la région (R) pour lesquels il y aura éclipse totale? Autrement dit, quelle sera la bande terrestre balayée par le cône d'ombre pure de la lune? Cette bande s'étend de part et d'autre de la courbe que trace l'axe du cône, courbe qui est la ligne de l'éclipse centrale. Or, cette dernière est la ligne CGC' de la carte (*fig. 1*). Elle part d'un point C situé dans l'océan Pacifique, par 119°30' de longitude ouest et 17°37' de latitude boréale, traverse le Mexique et un coin des États-Unis, en côtoyant le golfe du Mexique ; elle franchit ensuite l'Atlantique, puis traverse successivement le Portugal, l'Espagne, la Méditerranée, l'Algérie, la Tunisie, la Tripolitaine, pour venir se terminer en Égypte, en un point C' assez voisin de Louqsor. La zone de totalité est ainsi une bande étroite, d'environ 80 kilomètres de largeur, admettant la ligne CC' comme médiane et terminée en C et C' par des courbes analogues aux courbes AMB et A'M'B'.

Sur la carte précédente, le trait qui figure la ligne CC' a une épaisseur bien assez forte pour que, à l'échelle de cette carte, il représente la zone de totalité elle-même.

5. Le classement des localités par rapport à l'éclipse est désormais bien net.

Tous les points situés dans l'épaisseur du trait CC' auront éclipse

totale, cette éclipse étant en même temps centrale pour ceux qui se trouvent juste au milieu de l'épaisseur. Hors de ce trait, mais seulement à l'intérieur de la région (R), on verra une éclipse partielle, avec une échancrure maximum d'autant moins profonde que l'on s'éloignera plus de part et d'autre de CC'.

On divisait autrefois le diamètre du disque solaire en 12 parties égales appelées *doigts,* et, aujourd'hui encore, on dit souvent une éclipse de 4 doigts, de 8 doigts, pour désigner une éclipse de soleil où la lune cache, au maximum, $\frac{4}{12}$, $\frac{8}{12}$ du diamètre solaire. La carte de la figure 1 indique le lieu des points où l'éclipse est de 8 doigts, celui des points où elle est de 4 doigts. Cette addition complète la représentation et montre bien comment la grandeur de la phase maximum décroît à mesure qu'on s'avance vers les lignes de simple contact AA' et BB'.

II

6. Voici maintenant, *en temps moyen astronomique de Paris,* la disposition de l'éclipse générale du 28 mai par rapport au temps.

A midi $21^m,8$, le cône de pénombre, animé d'une très grande vitesse, vient toucher extérieurement la Terre : c'est le commencement de l'éclipse *générale ;* le point de contact P est le point du Globe qui voit l'éclipse le premier et elle débute pour lui au lever du soleil, de sorte qu'il est situé sur la ligne APB ; ce point se trouve sur l'océan Pacifique, à l'ouest de l'Amérique centrale. Puis le cône de pénombre entame la Terre. A $1^h23^m,5$, le cône d'ombre vient à son tour toucher la Terre : c'est le commencement de l'éclipse *totale.* Puis il l'entame et, 18 secondes après, l'axe du cône touche lui-même notre Globe au point C : c'est le commencement de l'éclipse *centrale.* Dès lors, le phénomène est pleinement en train : le cône de pénombre balaye la Terre, en même temps que l'ombre pure décrit la zone CC'. A $4^h42^m,8$, la trace de l'axe du cône arrive au point C' et cet axe, de nouveau tangent, abandonne notre Globe : l'éclipse centrale finit ; 18 secondes après, l'éclipse totale cesse de même. Enfin, à 5^h45^m, le cône de pénombre touche encore extérieurement la Terre, puis s'en éloigne : l'éclipse générale est terminée; le point de contact

P′ est le lieu terrestre qui voit l'éclipse le dernier et elle cesse pour lui au coucher du soleil, de sorte qu'il appartient à la ligne A′P′B′ ; ce point se trouve dans l'Afrique centrale, au nord-ouest du lac Tchad [1].

Remarquons que la tache d'ombre pure, courant sur les mers, sur les plaines, les monts, les vallées, ainsi que l'ombre du nuage emporté par le vent, mettra seulement de $1^h23^m,5$ à $4^h43^m,1$, c'est-à-dire $3^h19^m,6$, pour parcourir l'énorme distance CC′, ce qui implique une vitesse de plus de 1,200 mètres à la seconde.

7. Quant à la durée de la totalité, ses variations suivant le lieu sont des plus simples dans leur ensemble.

D'abord, le long de la ligne CC′ de l'éclipse centrale, elle va en croissant des extrémités C et C′ de cette ligne vers son milieu. Elle atteint son maximum en un point G qui est situé en plein océan Atlantique, à peu près à égale distance des points où la ligne CC′ pénètre en Portugal et en Amérique. Ce maximum n'est d'ailleurs que de 2^m14^s, et, sur le littoral portugais ou américain, on n'a déjà plus que $1^m,5$ environ de totalité.

Maintenant, sur une transversale à la ligne CC′, la totalité dure d'autant moins qu'on s'éloigne davantage du point où cette transversale coupe la médiane CC′ : de part et d'autre de ce point, la durée de la phase totale va en diminuant à mesure qu'on s'avance vers les lignes limites de la zone de totalité, limites où elle devient nulle.

La durée de la phase totale est ainsi une fonction de deux variables dont la plus grande valeur, égale à 2^m14^s, est obtenue au point G.

III

8. Une éclipse totale de soleil, quelle qu'elle soit, est toujours un des plus beaux spectacles que puisse nous offrir la Nature. Pour s'en convaincre, il suffit de se représenter cet imposant phénomène ou plutôt de lire les descriptions des personnes qui en ont été témoins.

Le disque noir de la lune envahit lentement le disque éblouis-

1. Toutes les heures qui précèdent étant moindres que 12, si on leur ajoute simplement la désignation *soir*, elles exprimeront les mêmes époques *en temps légal de France*.

sant du soleil, qui prend la forme d'un croissant ; ce croissant s'amincit graduellement et le voilà enfin réduit à un seul point, ce point unique peut être regardé fixement et produit sur l'œil l'effet de la lumière électrique [1]. Cependant le ciel s'est assombri et, depuis quelques minutes, la lumière a considérablement décru. Tout à coup, le dernier point solaire disparaît et la tache d'ombre, que l'on a pu voir s'avancer rapidement sur le sol, est maintenant sur l'observateur. La scène change brusquement : subitement il fait nuit. Non pas une nuit absolument obscure, car l'atmosphère reste éclairée dans ses lointains et diffuse encore de la lumière, mais une nuit spéciale, plus ou moins claire selon les circonstances, d'une clarté blafarde qui donne à la nature une couleur et un aspect étranges. Le thermomètre baisse ; les animaux et les végétaux subissent les effets que produit habituellement sur eux l'arrivée de la nuit ; souvent les bêtes sont effrayées par la disparition instantanée du jour, et l'on s'explique les craintes que, dans son ignorance, l'homme lui-même éprouvait naguère. En même temps, au ciel, autour du disque noir de la lune, on aperçoit cette gloire de rayons argentés qu'est la Couronne solaire et qui contribue à tempérer l'obscurité ; parfois, on voit aussi la couche rose qui constitue la Chromosphère, avec ses Protubérances ; enfin, les astres brillent, quelquefois à très grande distance du soleil, et on peut contempler les planètes, les étoiles des premières grandeurs. Ce moment solennel dure tout au plus quelques minutes. Soudain jaillit un éclair, celui dont parle le libraire Nicolas : c'est un point du soleil qui émerge, c'est le soleil qui renaît et avec lui la Nature.

Pendant que le disque solaire est à l'état de mince croissant lumineux, il arrive que les montagnes lunaires, voisines des extrémités effilées des cornes, détachent ces extrémités du reste du croissant. On a même vu le croissant, lorsqu'il est suffisamment étroit, se segmenter ainsi en une série de points lumineux distincts : c'est le phénomène dit *des grains de chapelet,* que Baily a décrit en détail à la suite de l'observation qu'il en fit en Écosse lors de l'éclipse annulaire du 15 mai 1836.

Un phénomène singulier, connu sous le nom de phénomène *des franges,* se manifeste aussi parfois sur le sol et sur les murs

1. Liais, *L'Espace céleste, éclipse de 1858.*

exposés à la lumière du soleil, quelques secondes avant la disparition de l'astre et quelques secondes après sa réapparition : des ombres légères se succèdent rapidement en vacillant à la surface du terrain et des bâtiments ; l'aspect est analogue à celui des ombres mobiles qu'on aperçoit sur le fond d'un bassin peu profond, plein d'une eau limpide, lorsque la surface, légèrement agitée, est éclairée par les rayons solaires [1]. Ce mouvement ondulatoire, encore mal expliqué, qui se produit seulement quand le segment solaire visible est très restreint, dépend des conditions atmosphériques.

9. Si l'on compare l'éclipse du 28 mai à certaines éclipses antérieures qui, sous le rapport des dimensions de la tache d'ombre, se sont présentées dans des conditions analogues, on est conduit à admettre que, pendant sa totalité, l'obscurcissement du ciel ne sera pas très considérable. Mais une circonstance plus fâcheuse, au point de vue des observations scientifiques, est la faible durée de cette totalité. Non seulement la durée maximum 2^m14^s, qui est réalisée au point G, est inférieure à la moyenne [2], mais elle ne pourra même pas être utilisée tout entière, car le point G est en plein océan, et, pour observer, il faut être sur terre ferme. On ne peut plus prétendre alors qu'à 1^m5 environ, en se plaçant dans les stations les plus avantageuses, sur les côtes de Portugal ou d'Amérique. Il faudra donc diviser le travail autant que possible et se hâter plus que jamais, si l'on veut tirer de l'éclipse tous les renseignements qu'elle est appelée à fournir.

10. Voici, dans l'état actuel de la science, les travaux qu'il importe le plus d'effectuer pendant les courts instants que dure une phase totale.

Avant tout, il faut saisir cette occasion unique d'obtenir quelques indications sur la Couronne solaire. En 1868, M. Janssen et l'astronome anglais Lockyer, adjoignant le spectroscope à la lunette astronomique, ont trouvé simultanément un procédé grâce auquel on peut étudier en tout temps, en dehors des éclipses, la Chromosphère et les Protubérances sur les bords du disque. Depuis, en 1892, M. Deslandres et le professeur Hale, de Chicago, sont parvenus, chacun de leur côté, à photographier, en tout

1. Lexthéric, *Notice d'Arago sur les éclipses.*

2. Le maximum de la durée d'une éclipse totale est de 8 minutes à l'équateur et de 6 minutes à la latitude de Paris.

temps aussi, non plus seulement la Chromosphère et les Protubérances sur le pourtour du disque, mais la Chromosphère sur le disque même. M. Deslandres a même organisé un spectrographe des vitesses qui enregistre les mouvements des vapeurs chromosphériques dans le sens du rayon visuel et fournit en outre l'épaisseur de la couche. Grâce à ces belles découvertes, on peut étudier la Chromosphère à loisir, sous la seule condition que le soleil soit visible, et il n'y a plus lieu de dépenser à son profit le temps si précieux des éclipses totales, ainsi qu'on le faisait autrefois. Mais il en est tout autrement de la Couronne : aujourd'hui, on n'a pas encore réussi à l'entrevoir en dehors du temps d'éclipse totale, si bien que la somme des moments pendant lesquels on a pu l'étudier n'atteint même pas une heure ; c'est ce qui explique comment nous sommes si ignorants à son sujet. Il importe donc de profiter de la seule circonstance qui permette de la voir, afin d'arriver à connaître sa constitution chimique, la loi qui préside aux changements de sa forme, si variable d'une éclipse à l'autre, sa rotation, ses rapports avec le corps du soleil. On devra par conséquent l'observer à la lunette et au spectroscope, la dessiner, la photographier, ainsi que son spectre.

Déjà les éclipses précédentes ont fourni quelques renseignements. On sait maintenant que, *dans ses parties basses,* la Couronne renferme de l'hydrogène, de l'hélium, du calcium, et il semble que, dans ses parties hautes, elle contienne une substance nouvelle qu'on a appelée le *Coronium*[1]. On est à peu près sûr aussi que, suivant la prévision de M. Janssen, la forme de la Couronne dépend de l'activité du soleil et suit la même loi de périodicité que les taches. A l'époque du minimum des taches, la Couronne est peu étendue dans le sens de l'axe du soleil, mais développée parallèlement à son équateur ; dans le voisinage des pôles, elle présente des aigrettes courtes, distinctes, en éventail. A l'époque du maximum, au contraire, les aigrettes sont disposées en désordre tout autour du disque, souvent inclinées, quelquefois même tangentes au disque, sans que rien distingue les régions polaires des autres ; le tout forme une masse lumineuse s'étendant uniformément à une grande distance autour du soleil. Comme en 1900 nous touchons à un minimum, on doit s'attendre à trouver le

1. La Couronne a une radiation verte qui lui est propre.

28 mai une Couronne du premier type, avec ce manque de lumière aux pôles qui constitue ce que les Anglais ont appelé *la fente polaire*. Enfin, M. Deslandres, qui observa au Sénégal l'éclipse totale du 16 avril 1893, a étudié pendant cette éclipse le mouvement de rotation supposé de la Couronne, en employant la méthode du déplacement des raies de Fizeau : il a trouvé des résultats qui tendent à démontrer que l'atmosphère coronale suit le globe solaire dans son mouvement. Telles sont les principales indications que nous possédons actuellement sur cette atmosphère.

Quant aux régions circumsolaires, on ne peut laisser échapper l'occasion de les visiter. Il est vrai que l'on ne croit plus aujourd'hui à l'existence d'une grosse planète intra-mercurielle, et que ces explorations n'ont encore donné aucun résultat. Mais, quand on songe aux difficultés qu'elles présentent et au petit nombre de minutes qui leur ont été consacrées jusqu'à ce jour, on est forcé de convenir que des astéroïdes, même assez gros, ont pu échapper aux investigations. Il faut donc fouiller toujours les régions voisines du soleil.

Il est utile de noter les astres qui apparaissent : l'ordre de grandeur et le nombre des étoiles qui deviennent visibles à l'œil nu permettent de caractériser le degré d'obscurcissement du ciel. Dans une éclipse totale dont parle Plutarque, le jour, suivant lui, avait si bien pris l'apparence de la nuit qu'on voyait les étoiles dans toutes les directions[1]. Pendant l'éclipse totale du 22 mai 1724, Maraldi et Jacques Cassini aperçurent, à Trianon, Mercure, Vénus et seulement un petit nombre d'étoiles. Dans l'éclipse du 8 juillet 1842, le nombre des étoiles visibles à l'œil nu, à Perpignan, ne s'éleva pas au-dessus de cinq. Le 28 mai, le soleil se trouve dans la constellation du Taureau, à proximité d'étoiles brillantes, parmi lesquelles je citerai, par ordre de distance croissante au soleil, les étoiles de première grandeur : Aldébaran à 5°, Bételgeuse à 26°, La Chèvre à 26°, Rigel, Pollux, Procyon, Sirius, dont les premières apparaîtront sans doute pendant la phase totale. Parmi les planètes, Mercure sera à 2° du soleil ; Mars et Vénus en seront à 28° et à 41°, Mars dans le Bélier et Vénus dans les Gémeaux. Neptune se trouvera encore dans le

1. Arago, *Notice sur les éclipses.*

Taureau, où il est depuis plusieurs années ; mais il n'est jamais visible à l'œil nu.

Il est important d'observer les instants précis des contacts, surtout des contacts intérieurs, qui permettent la détermination directe de la durée de totalité. Cette dernière détermination est particulièrement précieuse vers les frontières de la zone de totalité, frontières qu'il faudrait aussi fixer avec précision sur le terrain. Ces éléments sont en effet utiles pour contrôler et rectifier au besoin certains nombres employés spécialement dans le calcul des éclipses et des occultations, notamment les valeurs des diamètres apparents moyens du soleil et de la lune qui, pour ce cas, doivent être affranchis de l'irradiation et ne peuvent plus par conséquent se déduire purement et simplement des observations méridiennes.

Telles sont les principales opérations qu'il y a lieu d'effectuer pendant la durée si faible d'une phase totale. On voit qu'elles sont nombreuses et délicates. C'est seulement par une préparation complète et minutieuse, et en multipliant les observateurs[1], que l'on peut espérer les mener à bonne fin, surtout quand on n'a que 1m5 environ à sa disposition.

IV

11. Comme on l'a vu, la zone de totalité, large de 80 kilomètres environ, passe à proximité de la France : en Portugal, en Espagne, en Algérie, en Tunisie (*fig.* 2).

Elle pénètre en Portugal par Porto, Ovar, Aveiro et quitte l'Espagne sur Alicante, Torrevieja et le cap de Santa-Pola, après avoir traversé la péninsule ibérique au sud de Salamanque, d'Avila, de Tolède, de Cuenca, et au nord de Coïmbre, de Cacerès, de Murcie. Elle couvre Ovar, Porto, Aveiro, Vizeu, Guarda, Plasencia, Navalmoral, Talavera, Navahermosa, Daimiel, Manzanarès, Albacète, Hellin, Cieza, Yecla, Orihuela, Alicante, Elche. Cette dernière localité, ainsi que Plasencia et Navalmoral, sont

1. Le 4 octobre dernier, M. de la Baume-Pluvinel a fait, devant la Société astronomique de France, une communication relative à la prochaine éclipse, communication qui a été publiée dans le Bulletin de cette Société (numéro de janvier 1900) et reproduite par la *Revue générale des sciences*. Dans cet intéressant travail, l'auteur énumère, en particulier, tous les services que peuvent rendre les astronomes *amateurs*.

presque exactement sur la ligne de l'éclipse centrale; Ovar, Vizeu, Santa-Pola en sont tout près. Deux chefs-lieux de province, Ciudad-Rodrigo et Ciudad-Real, sont très peu au delà des frontières de la zone privilégiée.

Après avoir franchi la Méditerranée au sud-ouest des îles Ba-

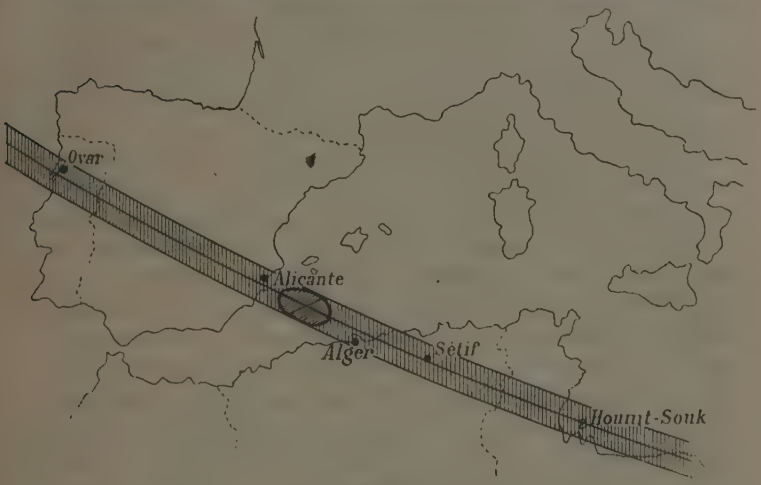


FIGURE 2.

léares, la bande de totalité entre en Algérie sur Alger et le cap Matifou, pour sortir de Tunisie dans le golfe de Gabès, au sud de Sfax. Elle laisse au nord Bougie, Constantine, Guelma, et au sud Blida, Médéa, Aumale, en couvrant Alger, Sétif et le bourg de Houmt-Souk, dans l'île de Djerba; ces deux dernières localités sont très près de la ligne de centralité. Tebessa et Gabès sont respectivement très voisins de la limite septentrionale et de la limite méridionale de la zone. Plus loin, la ligne de l'éclipse centrale se dirige vers Tripoli.

Au point où cette ligne entre en Europe, près d'Ovar, la durée de la phase totale est d'environ 1^m33^s, et, à sa sortie d'Espagne, cette durée dépasse à peine 1^m19^s. Elle décroît ainsi de 14 secondes environ. A Ovar, elle est exactement de 1^m33^s et, à Santa-Pola, de 1^m19^s. A l'entrée de la ligne centrale en Afrique, à l'est du cap Matifou, la durée de la totalité est un peu supérieure à 1^m11^s; à Sétif, elle est d'environ 1^m8^s; à l'entrée en Tunisie, au

sud de Tébessa, elle n'atteint pas 1^m4^s, et, sur Houmt-Souk, elle tombe au-dessous de 1 minute. A Alger, la totalité dure exactement 1^m12^s.

C'est à 4^h11^m environ que la tache d'ombre pure abordera à Ovar; elle l'abandonnera à $4^h12^m33^s$, et c'est à 4^h22^m qu'elle arrivera à Santa-Pola, pour quitter l'Espagne à $4^h23^m19^s$. Elle ne mettra donc pas un quart d'heure pour traverser la péninsule. Elle atteindra Alger exactement à $4^h26^m6^s$, pour l'abandonner à $4^h27^m8^s$. Toutes ces heures sont encore exprimées, bien entendu, en temps moyen astronomique de Paris.

Au point de vue de la durée de la totalité, les stations les plus avantageuses, dans le voisinage de la France, seront celles de la côte portugaise; Ovar, en particulier, se trouvera dans de bonnes conditions sous ce rapport. Mais il est un autre facteur avec lequel il est essentiel de compter; c'est le temps probable. Or, les mauvais temps venant de l'ouest, « les conditions météorologiques des stations situées sur le versant de l'Atlantique sont nécessairement très incertaines; le ciel doit même être fréquemment couvert dans cette région, car les chaînes de montagnes sont rapprochées de la côte et arrêtent les nuages venant de l'ouest[1] ». Dans ces circonstances, il vaudra mieux renoncer au Portugal et sacrifier quelques secondes de totalité pour reculer, non pas jusqu'à Alger, où on en sacrifierait peut-être un peu trop, mais jusque sur le plateau central de l'Espagne, ou même sur son littoral méditerranéen, le beau temps y étant à peu près assuré au mois de mai. Il est bon de remarquer que la hauteur du soleil au moment de la totalité a aussi une réelle importance pour les observations. Or, cette hauteur décroît assez rapidement à mesure que l'on s'avance vers l'est. Tandis qu'elle est de 41°43′ à Ovar, elle n'est déjà plus que de 33°32′ à Alicante. Cette diminution accentue encore l'infériorité des stations africaines.

12. La France entière assistera le 28 mai à une belle éclipse partielle. La ligne boréale de 8 doigts laisse en effet au-dessous d'elle l'ensemble du territoire français[2], de sorte que, pour les

1. De la Baume-Pluvinel, *loc. cit.*, d'après une note que M. Landerer, astronome à Valence, en Espagne, a publié dans le *Bulletin astronomique* de mars 1899 et au sujet de laquelle il y a lieu de lire le numéro de juin 1899 du même Bulletin.

2. Cette ligne traverse l'Angleterre et la grandeur de l'éclipse y sera de 0,683 à Oxford, de 0,681 à Greenwich, de 0,676 à Dublin, de 0,664 à Cambridge, de 0,656 à Liverpool, de 0,599 à Édimbourg.

départements les moins favorisés, l'éclipse sera encore de plus de $\frac{8}{12}$, c'est-à-dire que la lune cachera plus des 66 centièmes du diamètre solaire.

La ligne boréale de 9 doigts traverse la France en diagonale, du golfe de Saint-Malo au Piémont. Tout le long de cette ligne, la grandeur de l'éclipse sera de 0,750, le diamètre du disque solaire étant pris pour unité, et l'éclipse partielle sera d'autant plus ou d'autant moins marquée que l'on s'éloignera davantage de cette ligne vers le sud-ouest ou vers le nord-est.

Les localités françaises les plus privilégiées seront ainsi celles du sud-ouest : Pau, Tarbes, Foix, Perpignan, Mont-de-Marsan, Auch, Carcassonne, Toulouse verront une fort belle éclipse. La grandeur de l'éclipse sera :

0,857 à Toulouse,
0,843 à Bordeaux,
0,831 à Marseille,
0,805 à Nice,
0,781 à Lyon.

Au contraire, les départements du nord-est seront les moins favorisés : le Nord, le Pas-de-Calais, les Ardennes, la Meuse, Meurthe-et-Moselle. Mais, comme je l'ai dit, la phase maximum y sera encore très notable. A Besançon, la grandeur de l'éclipse sera de 0,734 et à Paris de 0,726.

V

13. Il me reste à chercher et à indiquer comment se présentera le phénomène à Nancy même.

La carte publiée dans la *Connaissance des Temps*, dont la figure 1 n'est qu'une reproduction réduite et incomplète, permet d'estimer à une dizaine de minutes près l'heure du commencement ou de la fin de l'éclipse générale en un lieu donné. On peut trouver ainsi une heure voisine du milieu de l'éclipse en ce lieu.

Soit alors T une heure voisine du milieu de l'éclipse à Nancy. Connaissant T, on sait déterminer, par *un seul* calcul, les corrections qu'il faut faire subir à cette heure pour en déduire les heures t_1 et t_2 du commencement et de la fin de l'éclipse. Ce n'est qu'une première approximation et les heures ainsi obtenues peuvent être erronées de plusieurs minutes.

Mais, connaissant maintenant t_1 et t_2, on peut recommencer séparément avec t_1 et avec t_2 le calcul que l'on a fait avec T. On obtiendra alors, à l'aide de *deux* calculs, des valeurs beaucoup plus approchées T_1 et T_2 des heures des contacts. C'est une deuxième approximation.

Si les corrections qu'elle apporte n'étaient pas suffisamment petites, on ferait une troisième approximation en recommençant le *double* calcul avec T_1 et T_2, et on trouverait ainsi T_1 et T_2 comme heures définitives pour Nancy.

On obtient en même temps les angles au pôle et au zénith, à l'entrée et à la sortie.

On peut d'ailleurs éviter le calcul de la première approximation. Il suffit de la faire *de visu*. En effet, le simple examen de la carte et des données numériques de la *Connaissance des Temps* permet de trouver immédiatement des heures approchées des contacts, que l'on adopte *à priori* comme valeurs des nombres désignés plus haut par t_1 et t_2.

Quant à l'heure de la plus grande phase, elle se détermine par les mêmes procédés, en faisant une, deux ou trois approximations successives et évitant le calcul de la première par une estimation à vue. On obtient en même temps la grandeur de la phase maximum.

14. Je vais d'abord calculer les heures du commencement et de la fin de l'éclipse à Nancy.

Si l'on examine la carte et les données numériques de la *Connaissance des Temps*, on acquiert bien vite la conviction que les heures cherchées doivent être très voisines de 3^h6^m et de 5^h13^m, temps moyen astronomique de Paris. Prenant alors

$$t_1 = 3^h6^m \text{ et } t_2 = 5^h13^m,$$

on fait la deuxième approximation. Elle m'a donné

$$T_1 = t_1 - 0^m,2 = 3^h\ 5^m,8,$$
$$T_2 = t_2 - 0^m,2 = 5^h12^m,8.$$

Les deux corrections sont donc déjà très petites, et une troisième approximation ne pourra modifier que fort peu ces résultats, si elle les modifie.

Je vais néanmoins l'effectuer, et c'est naturellement celle-là

que je transcris ici. Les notations employées et la méthode suivie sont celles qui sont adoptées chaque année dans la *Connaissance des Temps*, et il n'y a pas lieu de les définir actuellement.

Troisième approximation.

$\Gamma_1 = 345^{m},8$. Calcul de γ.

H	47°11′,7
L	3°51′
H + L	51° 2′,7
Log ($r\cos\varphi'$)	$\bar{1}$,820046
Log sin (H + L)	$\bar{1}$,890778
Log ξ	$\bar{1}$,711124
$\xi = +0,51433$	
Log ($r\sin\varphi'$)	$\bar{1}$,873600
Log cos d	$\bar{1}$,956884
Log (I)	$\bar{1}$,842242
Log ($r\cos\varphi'$)	$\bar{1}$,820046
Log sin d	$\bar{1}$,563177
Log cos (H − L)	$\bar{1}$,798455
Log (II)	$\bar{1}$,181678
(I) = +0,69570	
(II) = +0,15208	
γ_1 = (I) − (II) = +0,54362	
Log ($r'\sin\varphi'$)	$\bar{1}$,873600
Log sin d	$\bar{1}$,563177
Log (III)	$\bar{1}$,436777
Log ($r\cos\varphi'$)	$\bar{1}$,820046
Log cos d	$\bar{1}$,956884
Log cos (H − L)	$\bar{1}$,798455
Log (IV)	$\bar{1}$,575385
(III) = +0,27338	
(IV) = +0,38702	
ζ = (III) + (IV) = +0,66040	
Log const	$\bar{3}$,639922
Log ($r\cos\varphi'$)	$\bar{1}$,820046
Log cos (H + L)	$\bar{1}$,798455
Log ξ'	3,258830
Log const	$\bar{3}$,639922
Log ξ	$\bar{1}$,711124
Log sin d	1,563177
Log γ'	4,914223
$x = -0,00526$	
$\xi = -0,51433$	
$x - \xi = -0,51959$	

$y = -0,39449$	
$\gamma_1 = -0,54362$	
$y - \gamma_1 = -0,14913$	
$x' = +0,009215$	
$\xi' = +0,001815$	
$x' - \xi' = +0,007400$	
$y' = +0,000654$	
$\eta_1' = +0,000821$	
$y' - \eta_1' = -0,000167$	
Log ($\xi - x$)	$\bar{1}$,715662
Colog ($\eta - y$)	0,826431
Log tang (M − 180°)	0,542092
M − 180° = 73°59′,1	
Log ($\eta_1 - y$)	$\bar{1}$,173577
Colog cos (M − 180°)	0,559270
Log m	$\bar{1}$,732842
Log ($x' - \xi'$)	$\bar{3}$,869232
Colog ($\eta_1' - y'$)	3,777280
Log tang (180° − N)	1,646512
180° − N = 88°42′,4	
Log ($x' - \xi'$)	$\bar{3}$,869232
Colog sin (180° − N)	0,000114
Log n	$\bar{3}$,869346
M = 253°59′,1	
N = 91°17′,6	
M − N = 162°41′,5	
Log ζ	$\bar{1}$,819810
Log tang f	$\bar{3}$,663922
Log (ζ tang f)	$\bar{3}$,483732
$u = -0,54381$	
ζ tang f = −0,003065	
L = u − ζ tang f = −0,54076	
Log sin (M − N)	$\bar{1}$,473511
Log m	$\bar{1}$,732842
Colog L	0,266990
Log sin ψ	$\bar{1}$,473343
ψ = 17°18′,1	

Log m	$\bar{1},73284$
Colog n	$2,13066$
Log $[-\cos(M-N)]$	$\bar{1},97988$
Log $\left[-\frac{m}{n}\cos(M-N)\right]$	$1,84338$
Log L	$\bar{1},73301$
Colog n	$2,13066$

Log $\cos\psi$	$\bar{1},97989$
Log $\left(\frac{L}{n}\cos\psi\right)$	$1,84356$

$$-\frac{m}{n}\cos(M-N) = +69^m,72$$
$$+\frac{L}{n}\cos\psi = +69^m,75$$
$$\tau_1 = -0^m,03$$

Troisième approximation.

$T_2 = 5^h12^m,8$. Calcul de τ_2.

H	$78°56',7$
L	$3°51'$
$H+L$	$82°47',7$
Log $(r\cos\varphi')$	$\bar{1},82046$
Log $\sin(H+L)$	$\bar{1},99656$
Log ξ	$\bar{1},81702$
$\xi = +0,65613$	
Log $(r\sin\varphi')$	$\bar{1},87360$
Log $\cos d$	$\bar{1},96878$
Log (I)	$\bar{1},84238$
Log $(r\cos\varphi')$	$\bar{1},82046$
Log $\sin d$	$\bar{1},56345$
Log $\cos(H+L)$	$\bar{1},09837$
Log (II)	$\bar{2},48228$
(I) $= +0,69563$	
(II) $= +0,03036$	
$\eta = (I)-(II) = +0,66527$	
Log $(r\sin\varphi')$	$\bar{1},87360$
Log $\sin d$	$\bar{1},56345$
Log (III)	$\bar{1},43705$
Log $(r\cos\varphi')$	$\bar{1},82046$
Log $\cos d$	$\bar{1},96878$
Log $\cos(H+L)$	$\bar{1},09837$
Log (IV)	$\bar{2},88761$
(III) $= +0,27356$	
(IV) $= +0,07720$	
$\zeta = (III)+(IV) = +0,35076$	
Log const	$\bar{3},63992$
Log $(r\cos\varphi')$	$\bar{1},82046$
Log $\cos(H+L)$	$1,09837$
Log ξ'	$\bar{4},55875$
Log const	$\bar{3},63992$
Log ξ	$\bar{1},81702$
Log $\sin d$	$\bar{1},56345$
Log η'	$\bar{3},02039$

$x = +1,16493$	
$\xi = +0,65613$	
$x-\xi = +0,50880$	
$y = +0,47685$	
$\eta = +0,66527$	
$y-\eta = -0,18842$	
$x' = +0,009213$	
$\xi' = +0,000362$	
$x'-\xi' = +0,008851$	
$y' = +0,000643$	
$\eta' = +0,001048$	
$y'-\eta' = -0,000405$	
Log $(x-\xi)$	$\bar{1},70655$
Colog $(\eta-y)$	$0,72487$
Log tang $(180°-M)$	$0,43142$
$180°-M = 69°40',8$	
Log $(x-\xi)$	$\bar{1},70655$
Colog $\sin(180°-M)$	$0,02791$
Log m	$\bar{1},73446$
Log $(x'-\xi')$	$\bar{3},94699$
Colog $(\eta'-y')$	$3,39254$
Log tang $(180°-N)$	$1,33953$
$180°-N = 87°22',8$	
Log $(x'-\xi')$	$\bar{3},94699$
Colog $\sin(180°-N)$	$0,00045$
Log n	$\bar{3},94744$
$M = 110°19',2$	
$N = 92°37',2$	
$M-N = 17°42',0$	
Log ζ	$\bar{1},54501$
Log tang f	$\bar{3},66391$
Log $(\zeta\,\text{tang}\,f)$	$\bar{3},20892$
$u = +0,54399$	
$\zeta\,\text{tang}\,f = +0,00162$	
$L = u-\zeta\,\text{tang}\,f = +0,54237$	

Log sin (M — N)	$\bar{1},48292$	Log L	$\bar{1},73430$
Log m	$\bar{1},73446$	Colog n	2,05256
Colog L	0,26570	Log cos ψ	$\bar{1},97892$
Log sin ψ	$\bar{1},48308$	Log $\left[\frac{L}{n}\cos\psi\right]$	1,76578
$\psi = 17°42',4$			

Log m	$\bar{1},73446$	$\frac{m}{n}\cos(M-N) = +58^m,34$	
Colog n	2,05256		
Log cos (M — N)	$\bar{1},97894$	$\frac{L}{n}\cos\psi = +58^m,32$	
Log $\left[\frac{m}{n}\cos(M-N)\right]$ . . .	1,76596	$\tau_2 = -0^m,02$	

Les deux corrections τ_1 et τ_2 apportées par la troisième approximation sont ainsi inférieures à $0^m,04$. Elles ne modifient donc pas les chiffres des dixièmes de minute et laissent invariables les deux nombres fournis par l'approximation précédente.

J'en conclus que les heures du commencement et de la fin de l'éclipse à Nancy sont les suivantes :

$$T_1 = 3^h5^m,8 \qquad \text{et} \qquad T_2 = 5^h12^m,8.$$

15. Les points de la circonférence du disque solaire où se font les deux contacts sont déterminés soit par leurs angles au pôle, soit par leurs angles au zénith[1].

Si P_1 désigne l'angle au pôle pour le premier contact et P_2 pour le dernier, on a

$$P_1 = N - \psi + 180° \qquad \text{et} \qquad P_2 = N + \psi,$$

en prenant pour N et ψ, dans la première égalité, les valeurs qui proviennent du calcul de T_1, et, dans la seconde, celles qui proviennent du calcul de T_2. On obtient ainsi

$$P_1 = 254° \qquad \text{et} \qquad P_2 = 110°.$$

De même, si Z_1 et Z_2 représentent les angles au zénith à l'entrée et à la sortie, on a

$$Z_1 = P_1 - \gamma_1 \qquad \text{et} \qquad Z_2 = P_2 - \gamma_2,$$

γ_1 et γ_2 étant les angles parallactiques correspondants. Ces formules donnent

$$Z_1 = 211° \qquad \text{et} \qquad Z_2 = 66°.$$

1. Ces angles se comptent respectivement à partir du point nord et du point zénithal du limbe du soleil, dans le sens inverse de celui du mouvement des aiguilles d'une montre.

16. Cherchons l'heure de la plus grande phase.

Si, pour Paris, pour Besançon, pour Lyon, etc., on forme la moyenne arithmétique des heures du commencement et de la fin de l'éclipse, heures que l'on trouve dans la *Connaissance des Temps*, on constate que, dans toutes ces localités, cette moyenne est inférieure d'environ 3 minutes à l'heure de la phase maximum. Or, pour Nancy, d'après les valeurs de T_1 et de T_2, la moyenne en question est de $4^h9^m,3$. On est donc conduit à admettre que l'heure ronde 4^h12^m est très voisine de l'heure de la plus grande phase à Nancy. Et, en effet, nous allons voir qu'elle se trouve être cette heure elle-même.

Adoptant 4^h12^m comme résultat d'une première approximation, effectuons-en une deuxième.

Deuxième approximation.

$t = 4^h\,12^m$. Calcul de τ.

H.	63°44′,7
L.	3°51′
H + L	67°35′,7
Log ($r\cos\varphi'$).	$\bar{1}$,82046
Log sin (H + L)	$\bar{1}$,96592
Log ξ	$\bar{1}$,78638
$\xi = +0,61147$	
Log ($r\sin\varphi'$).	$\bar{1}$,87360
Log cos d	$\bar{1}$,96880
Log (I)	$\bar{1}$,84240
Log ($r\cos\varphi'$).	$\bar{1}$,82046
Log sin d	$\bar{1}$,56331
Log cos (H + L)	$\bar{1}$,58110
Log (II)	$\bar{2}$,96487
(I) = +0,69567	
(II) = +0,09223	
η = (I) − (II) = +0,60344	
Log const	$\bar{3}$,63992
Log ($r\cos\varphi'$).	$\bar{1}$,82046
Log cos (H + L)	$\bar{1}$,58110
Log ξ'	$\bar{3}$,04148
Log const	$\bar{3}$,63992
Log ξ	$\bar{1}$,78638
Log sin d	$\bar{1}$,56331
Log η'	$\bar{4}$,98961

$x = +0,60475$	
$\xi = +0,61147$	
$x - \xi = -0,00672$	
$y = +0,43762$	
$\eta = +0,60344$	
$y - \eta = -0,16582$	
$x' = +0,009215$	
$\xi' = +0,001100$	
$x' - \xi' = +0,008115$	
$y' = +0,000648$	
$\eta' = +0,000976$	
$y' - \eta' = -0,000328$	
Log ($\xi - x$)	$\bar{3}$,82737
Colog ($\eta - y$)	0,78037
Log tang (M − 180°) . . .	$\bar{2}$,60774
M − 180° = 2°19′,2	
Log ($\xi - x$)	$\bar{3}$,82737
Colog sin (M − 180°) . . .	1,39262
Log m.	$\bar{1}$,21999
Log ($x' - \xi'$).	$\bar{3}$,90929
Colog ($\eta' - y'$).	3,48413
Log tang (180° − N) . . .	1,39342
180° − N = 87°41′,1	
Log ($x' - \xi'$)	$\bar{3}$,90929
Colog sin (180° − N) . . .	0,00036
Log n.	$\bar{3}$,90965

$M = 182^\circ 19',2$
$N = 92^\circ 18',9$
$M - N = 90^\circ 0',3$

$\log m \ldots \bar{1},21999$
$\operatorname{colog} n \ldots 2,09035$
$\log\left[-\cos(M-N)\right] \ldots \bar{5},94085$

$\log\left[-\frac{m}{n}\cos(M-N)\right] \ldots \bar{3},25119$

$-\frac{m}{n}\cos(M-N) = 0,002$

$\tau = 0^m,00$

La correction τ n'atteint donc pas un centième de minute, et par conséquent $4^h12^m0^s$ représente l'heure de la phase maximum à Nancy.

17. Quant à la grandeur de cette phase, si l'on prend pour unité le diamètre du disque solaire, elle est exprimée par la fraction

$$F = \frac{L - m\sin(M-N)}{2(L - 0,2725)},$$

où L désigne la différence $u - \zeta \operatorname{tang} f$, u, ζ, $\operatorname{tang} f$, ainsi que m et $\sin(M-N)$, se rapportant à l'instant de la plus grande phase. D'où le calcul qui suit :

$\log(r\sin\varphi') \ldots \bar{1},87360$
$\log \sin d \ldots \bar{1},56331$
$\log(\mathrm{III}) \ldots \bar{1},43691$

$\log(r\cos\varphi') \ldots \bar{1},82046$
$\log\cos d \ldots \bar{1},96880$
$\log\cos(H+L) \ldots \bar{1},58110$
$\log(\mathrm{IV}) \ldots \bar{1},37036$

$(\mathrm{III}) = +0,27347$
$(\mathrm{IV}) = +0,23462$
$\zeta = (\mathrm{III}) + (\mathrm{IV}) = +0,50809$

$\log\zeta \ldots \bar{1},70594$
$\log \operatorname{tang} f \ldots \bar{3},66392$
$\log(\zeta \operatorname{tang} f) \ldots \bar{3},36986$

$u = +0,54391$
$\zeta \operatorname{tang} f = +0,00234$
$L = u - \zeta \operatorname{tang} f = +0,54157$

$\log\left[m\sin(M-N)\right] \ldots \bar{1},21999$
$m\sin(M-N) = +0,16595$
$L - m\sin(M-N) = 0,37562$
$2(L - 0,2725) = 0,53814$

$F = 0,69800.$

La grandeur de la phase maximum à Nancy sera donc de 0,698.

18. En résumé, les circonstances de l'éclipse à Nancy sont données par le tableau suivant :

Heure légale, 28 mai, soir.	Commencement	$3^h\ 5^m,8$
	Plus grande phase	$4^h12^m,0$
	Fin	$5^h12^m,8$
Le diamètre du disque solaire étant *un*.	Grandeur	0,698
Angle au pôle. Image directe.	Premier contact	254°
	Dernier contact	110°
Angle au zénith. Image directe.	Premier contact	211°
	Dernier contact	66°

J'ajoute qu'au moment de la phase maximum, la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon de Nancy sera d'environ 30°36′ et que son azimut, compté à partir du sud et vers l'ouest, vaudra environ 88°20′, de sorte que le soleil se trouvera, à 2 degrés près, dans la direction ouest.

La figure 3 montre quelles seront les apparences du phénomène (si toutefois le temps permet de le voir) pour une personne observant à l'œil nu, ou du moins avec un verre coloré ou enfumé.

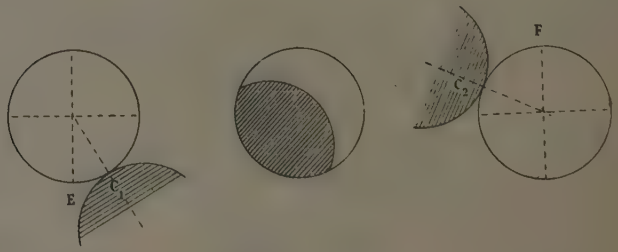


FIGURE 3.

Le point de premier contact C_1 est à droite et en bas, à 31° du point E le plus bas du disque. Le point de dernier contact C_2 est à gauche et en haut, à 66° du point F le plus haut du disque.

En principe, les cadrans des horloges publiques, notamment ceux des horloges *extérieures* des gares de chemins de fer, doivent marquer l'heure légale, c'est-à-dire l'heure de l'Observatoire de Paris. Mais on sait bien que cette condition n'est jamais remplie rigoureusement, de sorte qu'en aucun cas ces horloges ne pourraient servir à une détermination *directe* de l'heure d'une phase. C'est au contraire l'heure calculée de la phase qui pourrait être employée pour les régler.

Étude de géométrie numérique, par A. Calinon, ancien élève de l'École polytechnique.

§ 1. — *L'égalité numérique des figures.*

1. Nous ne pouvons constater la permanence de la forme qu'à l'aide d'un instrument de mesure dans lequel certaines parties, les graduations notamment, sont supposées conserver leur forme; il y a donc là un cercle vicieux.

C'est ce que M. Poincaré, dans son article *Sur les Principes de la Géométrie*[1], nous exprime en disant :

« Le mot « conserver sa forme » n'a, par lui-même, aucun « sens. Mais je lui en donne un en convenant de dire que certains « corps conservent leur forme. Ces corps ainsi choisis peuvent « alors servir d'instruments de mesure. Mais si je dis que ces « corps conservent leur forme, c'est parce que *je le veux bien* et « non parce que l'expérience m'y oblige. »

Il résulte de là une conséquence importante.

Soit un système de formes F_1, F_2, F_n, dont je veux établir la géométrie ; je choisis, parmi ces figures, F_1 par exemple, que j'adopte comme instrument de mesure ; avec cet instrument je constate que certaines figures F_2, F_3..., sont de forme fixe et qu'au contraire, certaines autres, comme F_n, sont de forme variable.

Cela posé, je remplace mon instrument de mesure F_1 par l'instrument F_n : dès lors, les figures qui étaient de forme fixe par

1. *Revue de métaphysique et de morale* de janvier 1900.

rapport à l'instrument F_1 seront de forme variable par rapport à l'instrument F_p.

Le premier instrument me donne pour mon système de formes une géométrie et mon second instrument m'en donne une autre ; toutes ces géométries sont aussi légitimes les unes que les autres ; il reste que, dans certains cas, l'une d'elles peut être plus commode que les autres.

Cela s'applique notamment au système des formes qui constituent l'univers ; la géométrie de cet univers dépend simplement du choix de l'instrument de mesure ; cet univers n'est en lui-même ni euclidien, ni lobatcheffskien, etc..., mais il est à volonté l'un ou l'autre selon l'instrument de mesure que l'on choisit, c'est-à-dire selon la figure que l'on convient de considérer comme étant de forme fixe.

Telles sont, il me semble, les idées de M. Poincaré sur cette question.

D'après cela, la notion d'égalité géométrique est tout à fait relative.

Je vais essayer ici d'établir les bases de la géométrie en prenant comme point de départ cette notion d'une égalité toute relative.

2. Pour déterminer complètement une figure il suffit évidemment de savoir mesurer un nombre convenable de *dimensions* prises dans cette figure ; ces dimensions connues, tous les autres éléments de la figure peuvent s'en déduire. Cela revient à dire que la détermination d'une figure peut toujours se ramener à ceci : mesurer des longueurs ou des distances.

Partant de là, je supposerai, pour construire la géométrie dont je m'occupe, qu'il m'est donné une distance infinitésimale que je puis transporter dans toutes les parties et suivant toutes les directions de l'espace considéré : cette distance qui, je le répète, est *une donnée,* jouira, par définition, de la propriété fondamentale d'être caractérisée par un nombre infiniment petit, d'ailleurs, quelconque, mais constant, *du*.

J'ai ainsi, dans l'espace, par définition, une longueur infiniment petite qui peut se déplacer comme on veut en restant *numériquement* égale à elle-même et à l'aide de laquelle il est possible de mesurer une longueur quelconque.

3. Il convient d'insister sur ce qui caractérise cette méthode.

D'abord ma distance infinitésimale *du* n'est nullement supposée rester égale à elle-même *géométriquement,* puisque j'ai admis que l'égalité géométrique n'avait plus aucun sens : j'attribue simplement à cette distance, arbitrairement choisie, une mesure numérique constante *du ;* cette distance reste donc *numériquement* égale à elle-même : ainsi, je remplace l'égalité géométrique par une égalité numérique entre des distances choisies arbitrairement : voilà bien la différence entre la géométrie ordinaire et la nouvelle.

Soit un point O dans l'espace et, autour de ce point, les points M_1, M_2, M_3..., tels que les distances OM_1, OM_2, OM_3... sont précisément la distance élémentaire, numériquement constante *du ;* je prends sur les directions OM_1, OM_2... d'autres distances infiniment petites OM'_1, OM'_2, OM'_3... A l'aide de ma distance *du,* connue en tous les points de l'espace et pour toutes les directions, je puis mesurer OM'_1, OM'_2, OM'_3... et j'obtiens ainsi les expressions numériques $K_1 du$, $K_2 du$, $K_3 du$..., où K_1, K_2, K_3... sont des nombres.

Mais la distance élémentaire OM_1... est prise *arbitrairement ;* je puis donc, à la place, prendre, comme distance élémentaire, OM'_1, OM'_2, OM'_3..., supposée numériquement égale à elle-même et égale, par exemple, à *du'*. Cette substitution, faite en tous les points de l'espace, change les dimensions de toutes les figures de l'espace et je ne parle ici que de dimensions *numériquement* exprimées, les seules qui aient pour nous un sens : par suite, deux dimensions qui étaient numériquement égales avec l'élément *du* seront devenues inégales avec l'élément *du'*.

Il n'y a qu'une exception, c'est lorsque les nombres K_1, K_2, K_3... sont tous égaux entre eux : dans ce cas *du'* est toujours proportionnel à *du,* ce qui, au fond, n'est pas un changement.

Ainsi, suivant que j'adopterai comme élément, supposé numériquement constant, *du* ou *du',* j'aurai pour le même espace et le même ensemble de figures, deux géométries différentes.

4. Sous ce point de vue, le mot égalité a donc un sens purement *numérique,* de là le nom de *Géométrie numérique* que j'ai cru devoir donner à cette étude.

Il est bien entendu, d'ailleurs, que, pour établir cette géométrie, je suppose acquises toute la science du nombre et toute l'analyse, cela *antérieurement* à toute notion géométrique.

J'admets, par conséquent, que la généralisation de l'idée de nombre (nombre fractionnaire, irrationnel, transcendant) se fait en partant des nombres entiers et seulement avec les nombres entiers sans aucun recours à la notion de grandeurs géométriques ou autres.

J'admets enfin que j'ai à ma disposition toutes les propriétés des diverses fonctions qu'on étudie en analyse et notamment des fonctions exponentielles et trigonométriques, toutes définies analytiquement et sans aucun recours à la géométrie : j'aurai tout particulièrement recours aux formules relatives aux fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, etc.

En un mot j'aborde la géométrie numérique avec toutes les ressources de l'analyse établie préalablement.

§ 2. — *Définition des coordonnées. L'élément linéaire.*

5. Pour traduire en formules précises les idées qui précèdent, il faut, d'abord, que je différencie par des coordonnées les points de l'espace que j'étudie : dans un espace à trois dimensions, les coordonnées d'un point sont trois nombres qui marquent l'individualité de ce point de telle façon que si deux points ont ces mêmes trois nombres pour coordonnées, ils se confondent en un seul et réciproquement.

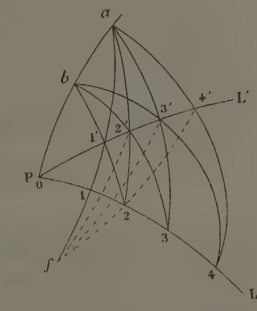
Dans un espace à deux dimensions, ces coordonnées d'un point se réduisent à deux nombres.

Ce double ou ce triple numérotage des divers points de l'espace peut, en particulier, s'obtenir d'une façon géométrique à l'aide de l'hypothèse suivante.

Soit d'abord un espace à deux dimensions, c'est-à-dire une surface ; je suppose que j'aie un instrument ou un procédé me permettant de tracer sur cette surface une famille de lignes L telles que par deux points de la surface il passe toujours une ligne L et généralement une seule.

Je montrerai plus loin que s'il existe une famille de ce genre sur une surface, il en existe une infinité d'autres ; mais pour le moment j'admets seulement qu'il en existe une que je sais construire.

6. Je trace sur la surface deux lignes L et L′ appartenant à ladite famille et je suppose que L et L′ se coupent au point P; je prends sur la surface deux points quelconques, a et b, non situés sur L et L′ mais tels que les trois points a, b et P appartiennent à une même ligne L; je trace par a une ligne L qui rencontre les deux lignes PL et PL′ en deux points que je numérote 1 et 1′; je trace une seconde ligne L passant par b et 1′, laquelle rencontre la ligne PL en un point que je numérote 2;

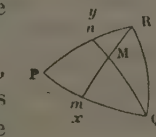


puis je continue à tracer successivement des lignes L par a et b et je numérote 2′ l'intersection de $a2$ avec PL′, puis 3 l'intersection de $b2'$ avec PL et ainsi de suite indéfiniment: nous avons ainsi sur les deux lignes PL et PL′ une série de points correspondant à la série des nombres entiers, cela, à partir du point P auquel nous attribuerons le nombre 0.

Voici, maintenant, comment on peut, entre deux nombres entiers successifs 1 et 2, par exemple, intercaler les nombres non entiers: traçons les deux lignes $1.1'$ et $2.4'$ qui se coupent en f; puis traçons les lignes $f2'$ et $f3'$; elles couperont PL en deux points que je numéroterai $1+\frac{1}{3}$ et $1+\frac{2}{3}$: on pourra subdiviser de la même façon ces subdivisions nouvelles, ce qui permettra, en continuant indéfiniment l'opération, de répartir la série continue des nombres sur l'ensemble des points de la ligne PL.

La méthode que je viens d'indiquer peut être variée de bien des manières et elle exigerait des conditions supplémentaires pour être complètement déterminée: mais il me suffit, pour mon objet, de montrer la possibilité de ce numérotage.

7. Soit un triangle PQR formé de trois lignes L; supposons les côtés PR et PQ numérotés comme je viens de l'indiquer.



Je prends sur PQ et PR deux points m et n, numérotés des nombres x et y; puis, je trace les lignes L, Rm et Qn, lesquelles se coupent en M; le point M est ainsi bien déterminé en fonctions des points m et n,

c'est-à-dire des nombres x et y. Je puis donc prendre ces deux nombres comme coordonnées du point M sur la surface.

Ayant ainsi, sur la surface, un système de coordonnées je pourrai représenter une courbe de la surface par une équation $f(x, y) = 0$.

Si je prends en particulier l'équation générale

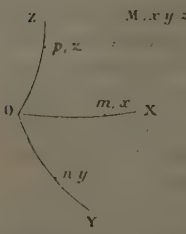
$$Af(xy) + B\varphi(xy) = 1$$

où A et B sont des paramètres variables, cette équation représente évidemment une famille de courbes telles qu'il en passe une par deux points de la surface, et une seule en général.

Il va de soi que les points d'une courbe quelconque peuvent être numérotés d'une infinité de façons; par exemple, si x et y sont les coordonnées du point M de la courbe $f(x, y) = 0$ et si l'on pose $u = \varphi(x, y)$, u est un nombre qui prend une valeur particulière pour chaque point M et peut, par suite, servir à numéroter les points de cette courbe.

8. Il est facile de passer de là à l'espace à trois dimensions : je prends dans cet espace une famille de surfaces S telles que chacune d'elles est déterminée par trois de ses points, sauf les cas particuliers.

Soient, dans l'espace, trois lignes OX, OY et OZ, numérotées toutes les trois; je prends sur ces lignes trois points m, n, p numérotés respectivement x, y et z. Je considère maintenant un ensemble de surfaces S passant par deux points fixes; il y en aura une passant par le point m, puisque la surface sera ainsi déterminée par trois points.



En raisonnant de même pour les points n et p, j'aurai deux nouvelles surfaces S. Ces trois surfaces S se rencontreront en un point M auquel on pourra attribuer comme coordonnées les nombres x, y et z qui numérotent les points m, n, p.

Je n'insiste pas sur ces considérations qui ne présentent aucune difficulté.

Une équation $f(x, y, z) = 0$ représente une surface et deux équations de ce genre l'intersection de deux surfaces ou une ligne.

9. Ayant à ma disposition un système de coordonnées, je puis

maintenant définir la distance de deux points, comme une fonction des coordonnées de ces deux points.

C'est là une définition purement numérique de la distance et comme, d'ailleurs, un espace à trois dimensions étant donné, on peut adopter arbitrairement la fonction qui sert de définition à la distance, on en conclut que, dans ce même espace, la distance de deux points est chose tout à fait relative et que deux distances numériquement égales avec telle fonction ne le sont plus avec telle autre.

Je me donnerai cette fonction sous la forme infinitésimale ; soient les deux points M de coordonnées x, y, z et M′ de coordonnées $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, que j'appellerai points infiniment voisins, leurs coordonnées différant de quantités infiniment petites. Si ds est la distance MM′, je définirai ds par la relation :

$$ds^n = f(dx, dy, dz) \qquad (1)$$

dans laquelle $f(dx, dy, dz)$ est un polynôme homogène et de degré n en dx, dy, dz, et où les coefficients sont des fonctions des coordonnées x, y, z du point M.

Si le point M reste fixe, les coefficients en question restent eux-mêmes constants ; posons également $ds =$ const., l'équation (1) représente alors, en dx, dy et dz, les seules variables restantes, la surface infinitésimale lieu des points M′ dont les distances au point M sont les mêmes. Je retrouve ainsi l'élément, considéré comme numériquement constant, du, dont j'ai parlé plus haut (3).

On a, en chaque point de l'espace, une surface analogue correspondant à $ds =$ const.

10. L'équation (1) étant homogène en dx, dy, dz et ds, lorsqu'elle est vérifiée par un système de valeurs, l'est aussi par tout autre système proportionnel. Si donc on multiplie les différentielles dx, dy et dz par un nombre fini K, la distance ds est multipliée par ce même nombre K. Lorsqu'on fait ainsi varier proportionnellement dx, dy et dz, le point M′ de coordonnées $x + dx$, $y + dy$ et $z + dz$ décrit un élément de ligne MM′ que j'appellerai une direction ; il en résulte que si M_1 a pour coordonnées $x + dx_1$, $y + dy_1$, $z + dz_1$, MM′ et MM_1 ont ou n'ont pas même direction suivant qu'on a ou qu'on n'a pas $\frac{dx}{dx_1} = \frac{dy}{dy_1} = \frac{dz}{dz_1}$.

Bien entendu, ce qui précède s'applique aux espaces à deux dimensions ou surfaces, à la seule condition de supprimer les termes en dz.

11. La définition que je viens de donner de la distance est extrêmement générale ; je vais l'astreindre à des conditions restrictives de façon à me rapprocher de la géométrie ordinaire.

Je m'impose d'abord cette condition que la distance ds ne devra s'annuler que lorsque les deux points M et M′ coïncideront, c'est-à-dire lorsqu'on aura à la fois $dx = 0$, $dy = 0$ et $dz = 0$.

Je reprends l'équation précédente :

$$ds^n = f(dx, dy, dz). \qquad (1)$$

Pour satisfaire à la condition que je viens de poser, l'équation (1) ne doit pas être du premier degré ; soit, en effet :

$$ds = a\,dx + b\,dy + c\,dz, \qquad (2)$$

a, b et c étant, bien entendu, des fonctions des coordonnées du point M, c'est-à-dire des constantes pour ce point.

Si le point M′ est distinct du point M, l'une au moins de ses coordonnées diffère de la coordonnée correspondante de M, de sorte qu'on a, par exemple, dz différent de zéro.

La relation (2) peut alors s'écrire :

$$\frac{ds}{dz} = a\frac{dx}{dz} + b\frac{dy}{dz} + c,$$

et l'on peut trouver une infinité de systèmes de valeurs de $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ qui annulent le second membre ; pour ces systèmes on a $\frac{ds}{dz} = 0$ et, comme dz n'est pas nul, il faut que ds soit nul. Ainsi la distance ds s'annulerait sans que dx, dy et dz fussent nuls à la fois, c'est-à-dire sans que le point M′ fût confondu avec M.

12. Je suppose maintenant que la fonction f de distance soit du second degré en dx, dy et dz. Dans ce cas, f peut toujours se mettre sous la forme d'une somme *algébrique* de trois carrés :

$$ds^2 = \pm (a dx + b dy + c dz)^2 \pm (a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz)^2 \pm (a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz)^2,$$

formule dans laquelle a, b... sont des fonctions, des coordonnées du point M.

Or, pour que ds ne s'annule que quand dx, dy et dz sont nuls à la fois, il faut que les trois carrés soient précédés du signe plus.

Je m'en tiendrai d'ailleurs à ce cas du second degré qui est le plus intéressant.

Si, au lieu d'un espace à trois dimensions, je prends une surface, l'équation du second degré sera :

$$ds^2 = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2.$$

La condition pour que ds ne puisse s'annuler qu'avec dx et dy est que le second membre puisse se mettre sous la forme d'une somme de deux carrés, ce qui exige $B^2 - AC < 0$, A étant supposé positif.

13. La formule (1) réduite au second degré et satisfaisant à la condition précédente est ce qu'on appelle l'élément linéaire de l'espace.

On pressent dès maintenant, d'après ce qu'on sait de la géométrie ordinaire, que cet élément linéaire, défini numériquement, va nous donner toute notre géométrie numérique, cela, à l'aide de l'analyse.

C'est du reste ce que je vais montrer dans ce qui suit, en donnant la définition des angles, des aires, de la courbure, et en établissant les formules relatives aux triangles. En résumé, lorsqu'on renonce au principe de l'égalité géométrique, la géométrie d'un ensemble de points n'est déterminée que lorsque l'on considère comme *donnés :*

1° Un système de coordonnées, c'est-à-dire un numérotage des points, double ou triple suivant qu'il s'agit d'un espace à deux ou à trois dimensions ;

2° La relation qui définit, en fonction de ces coordonnées, l'élément linéaire de l'espace.

Que l'on change l'une de ces deux données, ou les deux, et la géométrie de l'espace considéré change en même temps.

14. Mais il faut que j'insiste un peu sur ce point délicat.

Dans cette géométrie numérique, il n'y a, bien entendu, que des égalités numériques : par conséquent, un changement dans les données, lequel laisserait subsister toutes les égalités numériques, ne donnerait nullement lieu à une géométrie nouvelle. En

réalité, deux géométries d'un même espace sont différentes seulement dans le cas où ce qui est égal dans l'une cesse de l'être dans l'autre.

Ainsi, soient un système de coordonnées adopté α, β, γ et une formule de l'élément linéaire :

$$ds^2 = ad\alpha^2 + \ldots \qquad (1)$$

Si je substitue à α, β, γ un autre système de coordonnées lié au premier par des relations de forme fixe :

$$\alpha = f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \qquad \beta = f_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \qquad \gamma = f_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \quad (2)$$

et que je remplace, dans la formule de ds, α, β, γ par leurs expressions en α_1, β_1, γ_1, j'aurai la même valeur numérique de ds exprimée en α_1, β_1, γ_1 et $d\alpha_1$, $d\beta_1$, $d\gamma_1$. Donc, avec les nouvelles coordonnées et cette nouvelle expression de ds, je n'aurai pas une nouvelle géométrie puisque deux valeurs numériquement égales de ds le resteront encore après.

J'insiste sur cette question qui est capitale :

Soient 7, 3, 12 un système de valeurs de α, β, γ, et 4, 2, 9 un système de valeurs de α_1, β_1, γ_1, satisfaisant au système des équations (2), c'est-à-dire les transformant en identités. Pour ces valeurs, α et $f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, par exemple, sont un seul et même nombre ; si donc, dans le coefficient a de (1), on remplace α par f, on n'apporte à a aucun changement numérique ; de même, pour β et γ, et cela successivement dans a, b et c.

Enfin, en raisonnant de même sur le point infiniment voisin $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$, on voit que, finalement, pour les deux points infiniment voisins, de coordonnées numériques données, les substitutions faites à l'aide des formules (2) dans la formule (1) laissent à ds sa valeur numérique.

Dans ce qui suit, j'aurai très souvent recours à ces changements de coordonnées.

§ 3. — *Définition de l'angle. Trigonométrie des triangles élémentaires.*

15. Soit un second système de coordonnées t, u, v, défini en fonction d'un premier système α, β, γ par les relations :

$$\alpha = \mathrm{M}(t, u, v) \qquad \beta = \mathrm{N}(t, u, v) \qquad \gamma = \mathrm{P}(t, u, v) \quad (1)$$

d'où l'on déduit :

$$d\alpha = \frac{dM}{dt}\,dt + \frac{dM}{du}\,du + \frac{dN}{dv}\,dv, \quad d\beta = \ldots, \quad d\gamma = \ldots \qquad (2)$$

Ces formules permettent, dans l'expression de ds^2 en fonction de α, β, γ, $d\alpha$, $d\beta$ et $d\gamma$, de passer aux nouvelles coordonnées t, u, v. Soient dans les deux systèmes α, β, γ et t, u, v, les coordonnées d'un point initial M_0 supposé fixe et $\alpha + d\alpha\ldots$ ou $u + du\ldots$ les coordonnées d'un point variable m infiniment voisin.

Soit :

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + \ldots \qquad (3)$$

la formule de l'élément linéaire.

Dans chaque coefficient A, je remplace α, β, γ par M (t, u, v), N (t, u, v), P (t, u, v), en prenant les valeurs des coordonnées pour le point fixe M_0 ; dans ces conditions, la formule (3) garde pour tous ses coefficients des valeurs numériques fixes liées aux coordonnées du point fixe M_0. Si maintenant je porte dans (3) les valeurs $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ fournies par les relations (2) pour le point variable m, je remarque d'abord que dans les relations (2), les coefficients $\frac{dM}{dt}$, etc., ne contiennent que les coordonnées du point fixe M_0 et sont par suite indépendants du point variable m ; d'autre part, dans ces mêmes formules (2), dt, du et dv sont les seules quantités variables avec le point m.

Donc, finalement, quand on passe, dans la formule (3), des coordonnées α, β, γ aux coordonnées t, u, v, à l'aide des formules (1) et (2), le point M_0 étant fixe et le point infiniment voisin m variable, les substitutions variables dans la formule (3) se réduisent aux substitutions linéaires et homogènes en $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, dt, du, dv, qu'expriment les relations (2).

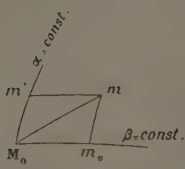
Cette remarque simplifie beaucoup l'étude des divers points d'un espace infiniment voisins d'un point particulier supposé fixe.

16. Je vais maintenant examiner la formule de l'élément linéaire M_0m sur une surface, M_0 étant supposé fixe et m variable.

Soit donc la formule :

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2 \qquad (1)$$

où je suppose (12) $B^2 - AC < 0$.



Si le point m se déplace d'abord à partir du point initial M_0, soit sur la courbe $\alpha = \text{const.}$, soit sur la courbe $\beta = \text{const.}$, dans ces deux cas, l'une des différentielles $d\alpha$ et $d\beta$ est nulle et l'on a : $M_0m_0^2 = A\,d\alpha^2$ et $M_0m'^2 = C\,d\beta^2$ ou $M_0m_0 = d\alpha\sqrt{A}$ et $M_0m' = d\beta\sqrt{C}$; posons $a = \sqrt{A}$, $c = \sqrt{C}$ et $\cos\theta = \dfrac{B}{\sqrt{AC}}$, ce qui est toujours possible puisqu'on a $B^2 - AC < 0$. Je rappelle ici (4) que je suppose toutes les fonctions trigonométriques définies et étudiées en analyse avant toute géométrie.

La formule (1) devient ainsi :

$$ds^2 = a^2 d\alpha^2 + 2\,ac.\cos\theta\,d\alpha\,d\beta + c^2 d\beta^2. \qquad (2)$$

Remplaçons $a d\alpha$ par M_0m_0, $b d\beta$ par M_0m', il vient $M_0m^2 = M_0m_0^2 + 2\,M_0m_0.\,M_0m'.\cos\theta + M_0m'^2$.

Bien entendu, dans les équations (1) et (2), A, B, C et a, c, $\cos\theta$ sont des fonctions des coordonnées α, β, γ du point M_0.

J'appelle, *par définition*, θ l'angle des deux éléments M_0m_0 et M_0m' ou l'angle que font en M_0 les deux courbes $\alpha = \text{const.}$ et $\beta = \text{const.}$ qui y passent.

17. On peut passer de là à l'angle de deux éléments quelconques issus du point M_0.

En effet, soit un changement de coordonnées correspondant (15) aux substitutions linéaires et homogènes :

$$d\alpha = p\,du + q\,dv \qquad d\beta = p_1 du + q_1 dv \qquad (3)$$

Je porte ces valeurs de $d\alpha$ et $d\beta$ dans la formule (1), il vient :

$$ds^2 = A'du^2 + 2B'du\,dv + C'dv^2$$

Posons, comme précédemment, $\cos\theta' = \dfrac{B'}{\sqrt{A'C'}}$, θ' est, par définition, l'angle des deux courbes $du = 0$ et $dv = 0$ ou $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, passant par M_0. Si, dans les équations (3), je fais successivement $du = 0$ et $dv = 0$, j'obtiens : $\dfrac{d\alpha}{d\beta} = \dfrac{q}{q_1}$ et $\dfrac{d\alpha}{d\beta} = \dfrac{p}{p_1}$, ce qui représente les mêmes courbes que $du = 0$ et $dv = 0$ par rapport aux coordonnées primitives α, β.

Ces deux courbes peuvent d'ailleurs être considérées comme deux courbes quelconques passant par M_0, puisque p, q, p_1, q_1 sont des paramètres arbitraires dont on peut toujours disposer de telle façon que, après la transformation des coordonnées, $du = 0$ et $dv = 0$ représentent deux courbes données d'avance.

18. — Je considère l'intégrale $\int ds$, dans laquelle ds est fourni par la formule (1) (16) : Si je lie par une équation $f(\alpha, \beta) = 0$ les deux coordonnées qui figurent dans ds, j'exprime que le point $\alpha\beta$ décrit une courbe sur la surface et $\int_{M_0}^{M} ds$ représente alors la somme des éléments linéaires de cette courbe depuis le point M_0 jusqu'au point M ; c'est ce que j'appellerai, par définition, la longueur de l'arc de courbe M_0M ; $\int_{M_0}^{M} ds = \text{arc } M_0M$.

Si, sur l'arc de courbe, M_0, M′ et M sont trois points se succédant dans l'ordre indiqué on a $\int_{M_0}^{M} ds = \int_{M_0}^{M'} ds + \int_{M'}^{M} ds$.

On exprime la même chose en disant que l'arc M_0M est la somme des arcs M_0M' et $M'M$: car il ne faut pas perdre de vue qu'en géométrie numérique l'addition a un sens purement arithmétique ou algébrique ; ajouter deux arcs, c'est simplement ajouter les nombres qui définissent les longueurs de ces arcs.

19. Si, de tous les arcs ayant mêmes extrémités communes M_0 et M on prend celui pour lequel l'intégrale $\int_{M_0}^{M} ds$ est minima, les intégrales $\int_{M_0}^{M'} ds$ et $\int_{M'}^{M} ds$, dans la relation $\int_{M^0}^{M} ds = \int_{M_0}^{M'} ds + \int_{M'}^{M} ds$, sont aussi des minima, car si, par exemple, $\int_{M^0}^{M'} ds$ n'était pas minimum entre M_0 et M′, en rendant cette intégrale minima on diminuerait l'intégrale $\int_{M_0}^{M} ds$, ce qui est impossible puisqu'elle est supposée minima.

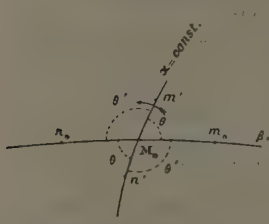
Cette courbe $M_0M'M$ jouit donc de la propriété d'être de lon-

gueur minima entre deux quelconques de ses points ; je l'appelle géodésique.

Bien entendu, la géodésique est relative au choix qu'on a fait des coordonnées et de la formule de l'élément linéaire ; toutefois, un changement de coordonnées avec changement correspondant dans la formule de l'élément linéaire (15) laisse subsister la géodésique, puisqu'un changement de ce genre n'altère pas la valeur numérique de l'élément linéaire.

20. Je reprends la formule précédente (16) :

$$M_0m^2 = M_0m_0^2 + 2M_0m_0\,M_0m'\cos\theta + M_0m'^2 \qquad (1)$$



Sur les courbes $\beta = \text{const.}$ et $\alpha = \text{const.}$ je prends à partir du point M_0 et en sens inverse de M_0m_0 et M_0m' les deux éléments $M_0n_0 = M_0m_0$ et $M_0n' = M_0m'$; je marque d'ailleurs les sens par les signes + et —.

J'ai dit que θ était l'angle des deux éléments M_0m_0 et M_0m' ; si je prends les deux éléments égaux et de signe contraire M_0n_0 et M_0n' on voit que tous les termes de la formule (1) gardent leurs signes et en particulier $\cos\theta$; je considérerai, par suite, θ comme étant aussi l'angle des deux éléments M_0n_0 et M_0n'.

Je prends maintenant dans la formule (1) l'élément M_0m' et je remplace M_0m_0 par l'élément égal et de signe contraire M_0n_0 ; le second terme de cette formule change alors de signe, et si θ' est l'angle de M_0m' et de M_0n_0, on a $\cos\theta' = -\cos\theta$; cela me permet de poser $\theta + \theta' = \pi$.

En résumé, les quatre éléments envisagés issus du point M_0 forment entre eux quatre angles, deux à deux égaux (ceux qui sont opposés par le sommet) et deux à deux supplémentaires $\theta + \theta' = \pi$ (ceux qui sont adjacents). Dans le cas où l'on a $\theta = \frac{\pi}{2}$, les quatre angles deviennent $\frac{\pi}{2}$; ce sont des angles droits ; on a alors $\cos\theta = 0$ et dans la formule (1), le second terme disparaît, comme aussi dans la formule (16) où B devient nul.

Les courbes $\alpha = \text{const.}$ et $\beta = \text{const.}$ sont dites alors orthogo-

nales ; dans ce cas, le terme en $d\alpha, d\beta$ de l'élément linéaire ds disparaît. C'est là un cas très important.

21. Soit un triangle MNP dont les trois côtés sont des éléments linéaires ; on peut toujours supposer, au besoin, par un changement de coordonnées (15), que les éléments MN et MP correspondent aux courbes $\beta = \text{const.}$ $\alpha = \text{const.}$

De cette façon, si MM′ est l'élément linéaire

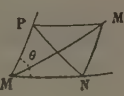
$$MM'^2 = A d\alpha^2 + 2B\, d\alpha\, d\beta + C d\beta^2 \qquad (1)$$

l'angle en M est donné par la formule (16)

$$\cos\theta = \frac{B}{\sqrt{AC}}.$$

Je suppose que les coordonnées des points M, N, P soient respectivement :

M : α et β
N : $\alpha + d\alpha$ et β
P : α et $\beta + d\beta$.



Puis pour point M′ de la formule MM′²... je prends le point de coordonnées $\alpha + d\alpha$ et $\beta + d\beta$.

Je vais maintenant évaluer NP : si je passe du point initial M au point initial N, la formule qui me donnera les éléments linéaires à partir du point N sera la formule (1) où A, B et C deviendront $A + dA$, $B + dB$ et $C + dC$:

$$ds^2 = (A + dA)\, d\alpha^2 + 2(B + dB)\, d\alpha\, d\beta + (C + dC)\, d\beta^2.$$

Et pour avoir NP (au lieu de ds) il faut dans cette formule remplacer $d\alpha$ et $d\beta$ par les différences des coordonnées entre N et P ; j'ai indiqué plus haut les coordonnées de ces deux points ; les différences sont $-d\alpha$ et $d\beta$. Il vient donc :

$$NP^2 = (A + dA)\, d\alpha^2 - 2(B + dB)\, d\alpha\, d\beta + (C + dC)\, d\beta^2$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur :

$$NP^2 = A d\alpha^2 - 2B\, d\alpha\, d\beta + C d\beta^2.$$

On voit que la seule différence avec la formule (1) c'est le changement de signe du terme en $d\alpha\, d\beta$. Mais on a, dans le triangle MNP, $MN = \sqrt{A}\, d\alpha$, $MP = \sqrt{C} d\beta$, $\cos\theta = \frac{B}{\sqrt{AC}}$.

En substituant dans l'expression de NP, il vient :

$$NP^2 = MN^2 - 2\,MN.\,MP.\cos\theta + MP^2.$$

C'est la relation entre les trois côtés d'un triangle MNP et l'angle θ opposé à l'un d'eux ; il y a deux autres formules du même genre pour les deux autres angles.

Ces relations contiennent toute la trigonométrie des triangles élémentaires : je vais le rappeler succinctement.

22. Soit le triangle ABC dont les côtés sont les éléments a, b et c, et les angles A, B et C.

D'après la formule que je viens d'établir, j'ai le premier groupe d'équations :

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ajoutant membre à membre les deux dernières de ces équations, il vient, toute simplification faite, $a = b\cos C + c\cos B$, ce qui, par permutation, donne le second groupe de formules :

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

J'élimine $\cos A$ entre les deux dernières de ces équations, ce qui donne $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$ ou, d'après la première, $b^2 - c^2 = b^2\cos^2 C - c^2\cos^2 B$, ou $c^2\sin^2 B - b^2\sin^2 C = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$ et, en complétant par permutation :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

On déduit immédiatement de là :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{b\cos C + c\cos B}.$$

Or, d'après les formules (2), les dénominateurs sont égaux : on a donc $\sin A = \sin(B + C)$ en égalant les numérateurs.

On ne peut pas avoir, sauf des cas particuliers, $A = B + C$, ce qui serait incompatible avec les équations qui s'en déduiraient par permutation.

Il faut donc qu'on ait $A + B + C = \pi$, en supposant les angles A, B et C inférieurs chacun à π. De là le troisième groupe :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c} \\ A + B + C = \pi \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Dans le cas où l'angle A est supposé droit, on a les triangles rectangles : le groupe (1) donne pour l'hypoténuse a :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

le groupe (2) donne :

$$b = a\cos C \qquad c = a\cos B$$

et le groupe (3)

$$b = a\sin B \qquad c = a\sin C \qquad B + C = \frac{\pi}{2}$$

J'ai ainsi toute la trigonométrie des triangles élémentaires.

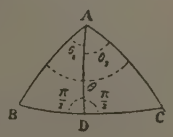
Je citerai encore les formules suivantes :

$$c = b\,\mathrm{tg}\,C, \qquad b = c\,\mathrm{tg}\,B.$$

23. J'ai indiqué, dans ce qui précède, comment je définissais (16) le nombre avec lequel je mesure un angle. Là encore, l'addition de deux angles a un sens purement numérique ; si θ est un angle dont le nombre est la somme des nombres relatifs aux deux angles θ_1 et θ_2, je dis simplement, par définition, que θ est la somme de θ_1 plus θ_2 ; une somme d'angles n'a pas d'autre sens.

Je vais montrer, maintenant, que si deux angles BAD, CAD ont un côté commun AD, les autres côtés non communs AB et AC forment un angle égal à la somme des deux autres.

Je suppose que les côtés sont, bien entendu, des éléments : par le point D je mène un élément BC que je suppose orthogonal à l'élément AD, de sorte que ces deux éléments font quatre angles égaux à $\frac{\pi}{2}$ (20).



Les deux triangles élémentaires ABD et ACD rectangles en D donnent (22) :

$$\theta_1 + B = \frac{\pi}{2} \qquad \theta_2 + C = \frac{\pi}{2}$$

d'où, en ajoutant, $\theta_1 + \theta_2 + B + C = \pi$.

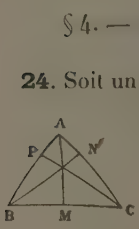
Mais le triangle ABC donne (22)

$$\theta + B + C = \pi$$

et la comparaison de ces deux formules prouve qu'on a $\theta = \theta_1 + \theta_2$, ce qu'il fallait démontrer.

§ 4. — *Courbure géodésique. Courbure des surfaces.*

24. Soit un triangle élémentaire ABC ; je prends dans ce triangle les éléments AM, BN et CP qui coupent orthogonalement les côtés ; on a (22) :



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{et} \quad b \sin C = AM.$$

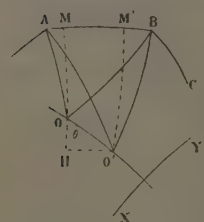
On en déduit, par permutation :

$$ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B = a.AM = b.BN = c.CP.$$

Je prendrai, par définition, la demi-valeur de ces expressions égales pour mesurer l'aire du triangle : l'aire du triangle jouit de cette propriété fondamentale :

Si, joignant un point O aux sommets d'un polygone élémentaire, je décompose ainsi ce polygone en triangles, la somme des aires de ces triangles est indépendante de la position du point O.

Je prends un second point O′ ; la somme des aires triangulaires relatives au point O est $\Sigma \frac{1}{2} AB.OM$; celle relative à O′ est $\Sigma \frac{1}{2} AB.O'M'$ et la différence est $\Sigma \frac{1}{2} AB.OH$. Si θ est l'angle de OO′ et de OH, θ est aussi l'angle de AB avec XY perpendiculaire à OO′ ; on a ainsi $\Sigma \frac{1}{2} AB.OH$



$= \Sigma \frac{1}{2} AB \cos\theta . OO' = \frac{1}{2} OO' \Sigma AB \cos\theta$: or, $\Sigma AB \cos\theta$ étant la projection sur XY du contour fermé ABC...A est nul ; donc la différence des deux sommes d'aires en O et O′ est nulle.

Cette somme d'aires, indépendante du point O est, par définition, l'aire du polygone élémentaire.

25. Je reprends la formule :

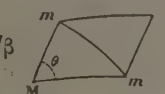
$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha.d\beta + C\,d\beta^2 \qquad (1)$$

et l'expression $\cos\vartheta = \dfrac{B}{\sqrt{AC}}$ entraînant $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{AC-B^2}}{\sqrt{AC}}$.

Je trace la figure $Mm\,M'm'$ dont les coordonnées sont respectivement :

M : α et β, M′ : $\alpha + d\alpha$ et $\beta + d\beta$

m : $\alpha + d\alpha$ et β, m' : α et $\beta + d\beta$.



On vérifie aisément en évaluant par la formule (1) les différences des coordonnées qu'on a :

$$Mm = m'M' = d\alpha\sqrt{A}, \qquad Mm' = mM' = d\beta\sqrt{C}.$$

Les deux triangles Mmm' et $M'mm'$ ayant de plus le côté mm' commun, les angles en M et M′ sont égaux, d'après les relations (21)

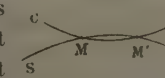
$$mm'^2 = Mm^2 - 2\,Mm.Mm'\cos M + Mm'^2$$
$$mm'^2 = M'm^2 - 2\,M'm.M'm'\cos M' + M'm'^2.$$

Ces deux triangles ont par suite même aire et le quadrilatère $Mm\,M'm'$ a une aire double de l'un d'eux, c'est-à-dire

$$Mm.Mm'.\sin\theta \text{ ou } d\alpha.\sqrt{A}.\,d\beta.\sqrt{C}.\sin\theta = d\alpha.d\beta.\sqrt{AC - B^2}.$$

Dans le cas d'un système orthogonal B est nul et l'aire se réduit à $d\alpha.d\beta\sqrt{AC}$.

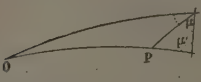
26. Soient M et M′ les deux extrémités d'un élément linéaire : je prends deux courbes C et S passant toutes deux par les points M et M′; lorsque, l'élément linéaire tendant vers 0, les deux points tendent à se confondre, les deux courbes C et S sont dites tangentes au point considéré.



Je trace toutes les géodésiques (19) passant par un point O de la surface et sur chacune d'elles je prends une longueur constante OM ; le lieu du point M est une courbe orthogonale aux géodésiques.

Soient M et M′ deux points infiniment voisins de la courbe ; il s'agit évidemment de montrer que les deux angles μ et μ' sont égaux.

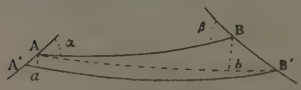
Soit, par exemple, $\mu > \mu'$; traçons MP faisant avec MM′ l'angle μ' : on a, dans le triangle élémentaire MPM′, $\frac{PM}{\sin\mu} = \frac{PM'}{\sin\mu'}$,



ou PM = PM′ : on en déduit OM′ = OP + PM′ = OP + PM et comme par hypothèse OM′ = OM, on a aussi OM = OP + PM, ce qui est impossible, puisque, par définition, la géodésique OM est plus courte que tout autre chemin OPM. Donc les deux angles μ et μ' ne peuvent pas être inégaux.

27. Soit un arc géodésique AB de longueur finie l, lequel devient, après un déplacement infiniment petit, A′B′ de longueur $l + dl$.

Dans ce déplacement, les extrémités A et B décrivent les éléments AA′ et BB′ qui font respectivement avec AB les angles α et β ; je vais évaluer l'augmentation $dl = A'B' - AB$: je trace la géodésique AB′ et la courbe Bb orthogonale aux géodésiques passant par A ; on a Ab = AB (26) et, dans le triangle rectangle BbB′, bB′ = BB′. cos BB′b ; la différence AB′ — AB est donc BB′. cos BB′b. On voit de même que la différence A′B′ — AB′ = A′a a pour expression AA′. cos AA′a. Donc, finalement, la différence A′B′ — AB, ou dl, est égale à AA′. cos AA′a + BB′. cos BB′b ; on a donc, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur :



$$dl = AA'\cos\alpha + BB'\cos\beta.$$

Je rappelle deux cas particuliers intéressants de cette formule.

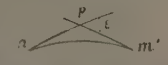
Si la géodésique AB est de longueur constante ($dl = 0$) et si, de plus, la géodésique est constamment normale à la trajectoire AA′ ($\alpha = 0$) on doit avoir BB′ cosβ = 0 ou $\beta = \frac{\pi}{2}$; donc AA′ est aussi normal à la trajectoire BB′.

Ainsi, si AB est constant, AB est en même temps normal aux trajectoires de ses deux extrémités ; ces trajectoires sont appelées des courbes parallèles.

Si AB est tangent à la trajectoire AA′ ($\alpha = 0$) et normal à la trajectoire BB′ $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$ on a $dl = AA'$: l'augmentation de l est donc égale à l'arc AA′ de la trajectoire.

La trajectoire BB′ normale à AB est dite la développante de la trajectoire AA′.

28. Soit un arc infiniment petit $mm' = ds$ auquel nous menons en m et m' deux géodésiques tangentes, celles-ci se coupant en p sous l'angle infiniment petit ε ; cet angle ε est appelé la courbure géodésique de l'arc mm', et la limite $\frac{\varepsilon}{ds}$, lorsque ds s'annule, est la courbure de la courbe mm' au point m.



Si l'on envisage un arc fini MM′ considéré comme la somme $\int_M^{M'} ds$, sa courbure géodésique totale est $\int_M^{M'} \varepsilon$.

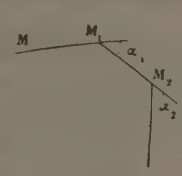
Si M_1 est un point de l'arc intermédiaire à M et M′, on a (18) :

$$\int_M^{M_1} ds + \int_{M_1}^{M'} ds = \int_M^{M'} ds ;$$

on a aussi pour les mêmes raisons :

$$\int_M^{M_1} \varepsilon + \int_{M_1}^{M'} \varepsilon = \int_M^{M'} \varepsilon.$$

Si au lieu d'un arc MM′ on envisage une ligne MM′ dont les côtés sont des arcs géodésiques $MM_1M_2 \ldots M'$, la courbure géodésique de la ligne MM_1M' se réduit, d'après la définition précédente, à la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$.



Enfin, si les côtés de la ligne sont eux-mêmes des courbes non géodésiques, chaque côté a une courbure géodésique $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ et la courbure totale géodésique de la ligne $MM_1M_2 \ldots M'$ est $\Sigma\gamma_1 + \Sigma\alpha_1$.

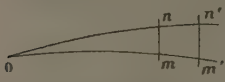
Je suppose maintenant que l'on prenne la courbure géodésique d'un contour fermé, en partant d'un point M de ce contour et en revenant à ce même point : soit θ, cette courbure géodésique, laquelle, bien entendu, est toujours un angle ; l'expression $2\pi - \theta$ est appelée l'excès du contour, ou la courbure de la portion de la surface comprise dans ce contour.

Soit σ l'aire de cette portion de la surface ; si le contour a pour limite un point M de la surface, la limite de l'expression $\frac{2\pi - \theta}{\sigma}$ est appelée la courbure de la surface au point M.

Il suit de là que, si une surface a une courbure constante $\frac{2\pi - \theta}{\sigma} = \text{const.}$, l'excès d'un contour quelconque $2\pi - \theta$ est proportionnel à l'aire σ comprise dans ledit contour.

29. Je définirai comme suit le système des coordonnées polaires sur une surface ; je considère le système des géodésiques passant par un point fixe O et le système des courbes orthogonales (26).

Soient ρ et θ les deux coordonnées du point m ; je suppose, d'après cela, que sur une géodésique Om on ait $\theta = \text{const.}$ et que sur une courbe mn, orthogonale aux géodésiques, on ait $\rho = \text{const.}$; et, pour simplifier, je suppose que ρ est précisément la longueur Om de l'arc de géodésique ; on sait, en effet, que si cette longueur est constante le point m décrit une courbe orthogonale aux géodésiques (26).



Soit

$$ds^2 = a^2 d\alpha^2 + l^2 d\beta^2$$

la formule de l'élément linéaire. Pour $\beta = \text{const.}$ on a $mm' = ad\alpha = d\rho$, et pour $\alpha = \text{const.}$ on a $mn = bd\beta$: par conséquent, l'élément linéaire, en ρ et θ, est de la forme :

$$ds^2 = d\rho^2 + b^2\, d\theta^2,$$

b étant une fonction de ρ et de θ.

Nous pouvons donc écrire aussi

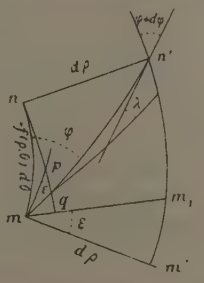
$$ds^2 = d\rho^2 + f^2(\rho, \theta)\, d\theta^2.$$

Telle est l'expression générale de ds en coordonnées polaires.

30. Je prends dans la figure précédente la partie $mn\,m'n'$ où l'on a $mm' = nn' = d\rho$ et $mn = f(\rho, \theta)\, d\theta$. Je trace en m et n les géodésiques tangentes à mn, lesquelles se rencontrent en p sous un angle ε ; cet angle ε est ainsi la courbure géodésique de l'arc mn ; enfin, je trace par m une courbe mm_1 parallèle à la géodésique nn' (27) ; d'après cela, la géodésique npq coupe mm_1 orthogonalement.

L'angle $m'mm_1$ est évidemment égal à ε, car ces deux angles forment un droit avec l'angle commun pmq : le triangle mm_1m', rectangle en m', donne $m_1m' = mm'.\operatorname{tg}\varepsilon$ et, comme ε est infini-

ment petit, $m_1 m' = mm' . \varepsilon$. Mais $m_1 m'$, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, représente évidemment la différence $m'n' - mn$, c'est-à-dire $d(mn)$, lorsque ρ augmente de $d\rho$; on a donc finalement



$$\varepsilon \, d\rho = d(mn) = \frac{df}{d\rho} \, d\rho . d\theta$$

ou

$$\varepsilon = \frac{df}{d\rho} \, d\theta .$$

Je vais évaluer maintenant la courbure $\frac{1}{R^2}$ de la surface, courbure représentée par le rapport de l'excès du contour $mn\,n'm'$ à l'aire $mm' \times mn$ comprise dans ce même contour (28).

Si $\varepsilon + d\varepsilon$ est la courbure géodésique de $m'n'$, on voit immédiatement que l'excès du contour est égal à $-d\varepsilon$; l'aire a d'ailleurs pour expression $f(\rho, \theta) \, d\theta . d\rho$; on a ainsi $\frac{1}{R^2} = \frac{-d\varepsilon}{f(\rho, \theta) \, d\theta . d\rho}$; mais, nous avons $\varepsilon = \frac{df}{d\rho} d\theta$; et par suite $\frac{d\varepsilon}{d\rho} = \frac{d^2 f}{d\rho^2} d\theta$; d'où l'on tire $\frac{1}{R^2} = -\frac{\frac{d^2 f}{d\rho^2}}{f(\rho, \theta)}$, ce qui donne la courbure de la surface au point considéré. Bien entendu, dans cette formule, R^2 peut être positif ou négatif, selon que la courbure est elle-même positive ou négative.

31. Je trace par les points m et n' une courbe quelconque dont l'arc mn' a pour courbure géodésique λ. Cette courbe coupe l'arc mn sous l'angle φ et l'arc $m'n'$ sous l'angle $\varphi + d\varphi$.

Je vais chercher la courbure λ en fonction des angles φ et $\varphi + d\varphi$; l'excès du contour mnn' étant égal à la courbure $\frac{1}{R^2}$ de la surface multipliée par l'aire enfermée dans ce même contour est un infiniment petit du second ordre. Or, cet excès a pour expression $-\varepsilon - d\varphi - \lambda$; on doit donc avoir $-\varepsilon = d\varphi + \lambda$, puisque ε, $d\varphi$ et λ sont des infiniment petits du premier ordre.

Dans le cas particulier où mn' est un arc géodésique, la courbure λ est nulle et l'on a $-\varepsilon = d\varphi$.

Enfin, je signale encore, dans le triangle mnn' rectangle en n, la relation

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{nn'}{mn} = \frac{d\rho}{f(\rho, \theta)\, d\theta}.$$

§ 5. — *Les surfaces à courbure constante.*

32. Je vais maintenant examiner d'une façon plus particulière les surfaces dites à courbure constante caractérisées, en coordonnées polaires, par la formule (30) :

$$\frac{1}{R^2} = -\frac{f''_{\rho^2}}{f(\rho, \theta)} = \text{const.},$$

l'élément linéaire étant $ds^2 = d\rho^2 + f^2(\rho, \theta)\, d\theta^2$.

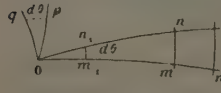
Sur ces surfaces, les courbes $\rho = \text{const.}$, normales aux géodésiques passant par le point O, sont appelées des cercles de centre (ou de pôle) O.

Supposons d'abord R^2 positif, on a, en intégrant l'équation précédente par rapport à ρ :

$$f(\rho, \theta) = M \sin\frac{\rho}{R} + N \cos\frac{\rho}{R}$$

où M et N peuvent être des fonctions de θ, mais ne contiennent pas ρ.

Examinons la variation de l'arc de cercle infiniment petit $m\,n$, lorsque le point m se dirige vers O en suivant la géodésique Om ($\theta = \text{const.}$) ; on a $mn = f(\rho, \theta)\, d\theta$, et, dans le mouvement considéré, ρ est seul variable.



Si $Om = \rho$ devient infiniment petit, l'arc de cercle $m_1 n_1$ devient évidemment du second ordre. Donc $f(\rho, \theta)\, d\theta$ est du second ordre quand ρ devient infiniment petit du premier ordre ; donc, dans ce cas, $f(\rho, \theta)$ est du premier ordre et s'annule avec ρ. Ainsi $f(\rho, \theta)$, ou son égal $M \sin\frac{\rho}{R} + N \cos\frac{\rho}{R}$, s'annule avec ρ, ce qui exige que N, qui est une fonction de θ seulement, soit nul ; on a donc simplement :

$$f(\rho, \theta) = M \sin\frac{\rho}{R}$$

et par suite :

$$ds^2 = d\rho^2 + M^2 \sin^2 \frac{\rho}{R}\, d\theta^2.$$

Mais, M étant fonction seulement de θ, on peut toujours poser $M d\theta = R d\theta_1$, ce qui donne pour l'élément linéaire, en supprimant l'indice :

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2 \sin^2 \frac{\rho}{R}\, d\theta^2.$$

J'ai supposé R^2 positif ; pour R^2 négatif, il n'y aurait qu'à changer $\sin \frac{\rho}{R}$ en $\sin$ hyp. $\frac{\rho}{R}$.

33. D'après cela, l'arc de cercle mn a pour longueur $mn = R \sin \frac{\rho}{R} d\theta$. La formule qui donne la courbure géodésique ε de ce même arc est (30) $\varepsilon = \frac{df}{d\rho} d\theta$, c'est-à-dire $\varepsilon = \cos \frac{\rho}{R} d\theta$. On voit que mn et ε sont tous deux proportionnels à $d\theta$.

Il est d'ailleurs facile de voir la signification de $d\theta$: en effet, je suppose que mn devienne $m_1 n_1$ en se rapprochant du point O, les deux tangentes géodésiques en m_1 et n_1, dont l'angle est la courbure de $m_1 n_1$, deviennent, à la limite, en O, les géodésiques Op et Oq respectivement perpendiculaires à Om et On ; il en résulte que les deux angles pOq et mOn sont égaux comme formant un angle droit avec l'angle commun pOn.

Ainsi ε, quand l'arc de cercle mn se rapproche infiniment de O, a pour limite l'angle mOn.

D'autre part, la formule $\varepsilon = \cos \frac{\rho}{R} d\theta$ nous donne, pour $\rho = 0$, $\varepsilon = d\theta$; d'où il résulte que l'angle $d\theta$ est l'angle mOn.

Ainsi, dans ce système de coordonnées polaires, θ est l'angle de la géodésique Om avec une géodésique fixe passant par O. Les formules $mn = R \sin \frac{\rho}{R} d\theta$ et $\varepsilon \cos \frac{\rho}{R} d\theta$ montrent que pour le cercle entier, c'est-à-dire lorsque l'on a $\int d\theta = 2\pi$, il vient :

$$\int mn = 2\pi R \sin \frac{\rho}{R}, \quad \int \varepsilon = 2\pi \cos \frac{\rho}{R}.$$

Si le cercle devient de rayon infiniment petit $d\rho$, on a $mn = d\rho . d\theta$ et, pour la circonférence entière, $\int mn = 2\pi d\rho$; ainsi, dans ce cercle de rayon $d\rho$, l'arc est proportionnel à l'angle au centre et le rapport de la circonférence totale au rayon est 2π.

Enfin, on obtient aisément l'aire du cercle de rayon ρ ; soit σ cette aire, la courbure géodésique de la circonférence totale est

$$\int \varepsilon = 2\pi \cos \frac{\rho}{R}$$

et l'excès (28) :

$$2\pi - 2\pi \cos \frac{\rho}{R} = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\rho}{R}\right).$$

La courbure de la surface est donc (28) :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{2\pi \left(1 - \cos \frac{\rho}{R}\right)}{\sigma},$$

d'où $\sigma = 2\pi R^2 \left(1 - \cos \frac{\rho}{R}\right)$.

C'est l'aire cherchée ; pour ρ infiniment petit, on a

$$\cos \frac{d\rho}{R} = 1 - \frac{1}{2} \frac{d\rho^2}{R^2}$$

ou

$$1 - \cos \frac{d\rho}{R} = \frac{1}{2} \frac{d\rho^2}{R^2},$$

ce qui donne finalement $\sigma = \pi d\rho^2$.

34. Soit, sur une surface à courbure constante, un triangle géodésique A B C de dimensions finies ; si E est l'excès de ce triangle et σ sa surface, on a (28) $\frac{E}{\sigma} = \pm \frac{1}{R^2}$. Si A, B et C sont les angles du triangle, on a $E = A + B + C - \pi$ (28) ; il vient donc $A + B + C - \pi = \pm \frac{\sigma}{R^2}$. De là cette conclusion :

1° Si la surface est à courbure positive, la somme des angles du triangle géodésique est toujours supérieur à π ;

2° Si la surface est à courbure négative, cette somme est toujours inférieure à π ;

3° Enfin, si la surface est à courbure nulle ($R = \infty$), cette somme est toujours égale à π.

Voici maintenant une propriété fondamentale des surfaces à courbure constante : la formule de l'élément linéaire est (32) :

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2 \sin^2 \frac{\rho}{R} d\theta^2$$

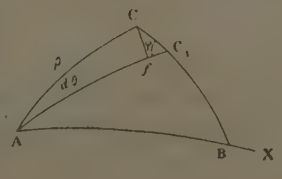
et ne contient qu'un paramètre variable R.

Cela posé, une figure étant construite sur la surface et rapportée aux coordonnées polaires ρ et θ, l'origine étant O et la géodésique initiale OX, construisons une seconde figure avec les mêmes valeurs de ρ et de θ, mais en prenant une autre origine O′ et une autre géodésique initiale O′X′ ; cette seconde figure sera numériquement égale à la précédente ; car, dans les deux figures, l'élément linéaire reste identique ($ds^2 = d\rho^2 + R^2 \sin^2 \frac{\rho}{R} d\theta^2$), puisque R ne change pas. Il en résulte que, sur une surface à courbure constante, une figure étant construite en un point, on peut toujours en construire une autre numériquement égale en un autre point quelconque de la surface.

La réciproque est vraie, car si sur une surface on peut, en deux points quelconques, construire deux contours fermés infiniment petits numériquement égaux, ces deux contours enferment la même aire et ont même excès, de sorte que la surface a même courbure aux deux points.

35. Je vais maintenant établir, sur les surfaces à courbure constante, la trigonométrie des triangles géodésiques à dimensions finies.

Soit le triangle géodésique ABC ; je prends pour pôle des coordonnées polaires le sommet A et je compte l'angle θ à partir de la géodésique OX, c'est-à-dire du côté AB. Supposons que le point C se déplace vers B sur le côté CB et soit C_1 une position infiniment voisine de C ; je trace l'arc de cercle Cf et je désigne par φ l'angle AC_1C ; si ε est la courbure géodésique de l'arc Cf, on a (33) $\varepsilon = \cos \frac{\rho}{R} d\theta$ et $Cf = R \sin \frac{\rho}{R} d\theta$; et comme ε est égal



à $-d\varphi(31)$, il vient $d\varphi = -\cos\frac{\rho}{R}\,d\vartheta$. Mais on a aussi $\operatorname{tg}\varphi = \frac{Cf}{C_1 f} =$ $R\sin\frac{\rho}{R}\frac{d\theta}{d\rho}$, d'où l'on déduit $\frac{d\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{d\rho}{R\operatorname{tg}\frac{\rho}{R}}$ et, en intégrant, $l\sin\varphi$ $= -l\sin\frac{\rho}{R} + K$, c'est-à-dire finalement : $\sin\varphi.\sin\frac{\rho}{R} = \text{const.}$

Ainsi, ce produit reste constant lorsque le point C_1 se déplace sur CB ; prenons sa valeur aux deux points B et C, il vient

$$\sin C.\sin\frac{AC}{R} = \sin B.\sin\frac{AB}{R}$$

ou

$$\frac{\sin\frac{AB}{R}}{\sin C} = \frac{\sin\frac{AC}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{BC}{R}}{\sin A} \qquad (1)$$

Dans les formules précédentes, je suppose $B = \frac{\pi}{2}$; il vient

$$\sin\varphi.\sin\frac{\rho}{R} = \sin\frac{AB}{R} \text{ ou } \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{AB}{R}}{\sin^2\frac{\rho}{R}}}$$

Mais le triangle rectangle $Cf C_1$ donne :

$$CC_1 = \frac{d\rho}{\cos\varphi} = \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{AB}{R}}{\sin^2\frac{\rho}{R}}}}$$

d'où, en intégrant,

$$\int_B^C CC_1 = BC = \int \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{AB}{R}}{\sin^2\frac{\rho}{R}}}}$$

ou

$$\cos\frac{BC}{R} = \frac{\cos\frac{AC}{R}}{\cos\frac{AB}{R}}$$

c'est-à-dire

$$\cos\frac{AC}{R} = \cos\frac{BC}{R}\cos\frac{AB}{R}.$$

Cette dernière formule concerne seulement les triangles rectangles en B : mais, en la combinant avec la formule (1), on trouve aisément pour les triangles non rectangles :

$$\cos\frac{AC}{R} = \cos\frac{BC}{R}\cos\frac{AB}{R} + \sin\frac{BC}{R}\sin\frac{AB}{R}\cos B. \qquad (2)$$

36. Les formules (1) et (2) contiennent toute la trigonométrie des triangles géodésiques des surfaces à courbure constante positive.

Pour les surfaces à courbure négative, il suffit de remplacer R^2 par $-R^2$, ou R par Ri, ou, ce qui revient au même, sin et cos $\frac{AB}{R}$ par sin hyp. et cos hyp. $\frac{AB}{R}$, cela pour les côtés seulement, les angles A, B et C conservant leur forme sin et cos A.

Dans le cas où la courbure est nulle ($R = \infty$), les formules (1) et (2) deviennent :

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$$

et

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC,\ AB\cos B.$$

J'ai déjà dit que dans ce cas on avait (34) : $A + B + C = \pi$.

On retrouve ainsi toute la trigonométrie connue des triangles euclidiens, riemanniens (ou sphériques) et lobats.

La formule de l'élément linéaire

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2\sin^2\frac{\rho}{R}\,d\delta^2$$

pour $R = \infty$ devient $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\delta^2$.

La transformation connue $\rho^2 = x^2 + y^2$ et $\operatorname{tg}\delta = \frac{y}{x}$ donne à cet élément linéaire la forme $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Je n'insiste pas sur ces formules familières à tous les géomètres.

Je remarque seulement que pour $R = \infty$, la trigonométrie des triangles géodésiques finis est celle des triangles infiniment petits sur une surface quelconque.

§ 6. — *Les espaces à courbure constante. Conclusions.*

37. Je dirai peu de choses sur les espaces à trois dimensions : j'ai indiqué (8) comment on pouvait, dans un tel espace, déterminer chaque point par ses trois coordonnées : cela fait, la géométrie de cet espace est déterminée lorsqu'on s'est donné la formule de l'élément linéaire.

Dans cet espace, la géodésique se définit, comme sur une surface, après qu'on a défini la longueur d'un arc de courbe : l'angle de deux lignes qui se coupent n'a d'existence que sur une surface.

Si je considère une surface appartenant à l'espace considéré, cette surface a elle-même ses géodésiques, lignes de plus courte longueur situées sur la surface ; en général, ces géodésiques ne sont pas des géodésiques de l'espace à trois dimensions ; car telle ligne qui, sur une surface S, joint par le court chemin les points A et B peut être et est en général plus longue qu'une ligne qui joint A et B par le plus court chemin, sans être astreinte à être située sur la surface S.

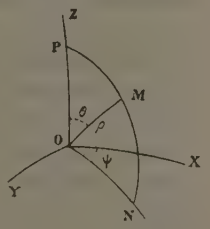
Cependant, il peut arriver que les géodésiques de la surface S soient en même temps des géodésiques de l'espace ; les surfaces S jouissant de ces propriétés s'appellent des surfaces géodésiques. Il résulte de là que, lorsqu'une surface géodésique contient deux points d'une géodésique de l'espace, elle la contient tout entière. On en conclut aisément que trois points non situés sur une même géodésique ou une géodésique et un point extérieur déterminent une surface géodésique.

De même, deux surfaces géodésiques se coupent suivant une géodésique, etc.

38. Voici, d'après cela, comment on peut définir le système des coordonnées polaires.

Soient trois surfaces géodésiques se coupant orthogonalement suivant les géodésiques OX, OY et OZ, c'est-à-dire que les angles XOY, YOZ et XOZ sont droits. Pour avoir les coordonnées polaires du point M, je fais passer une surface géodésique par M et la géodésique OZ, laquelle surface coupe la surface géodésique XOY suivant la géodésique ON ; enfin, je trace dans la surface géodésique NOP la géodésique OM. Les coordonnées du point M sont :

ρ la longueur de la géodésique OM, θ l'angle des deux géodésiques OM et OZ, ψ l'angle des deux géodésiques ON et OX. Si l'on examine dans ce système ce que représentent les trois surfaces $\rho = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ et $\psi = \text{const.}$, on voit que le point M est l'intersection de trois surfaces de ce genre; ces surfaces sont orthogonales et sont une sphère, un cône et une surface géodésique.



Avec ces coordonnées, l'élément linéaire peut toujours se mettre sous la forme :

$$ds^2 = d\rho^2 + B d\theta^2 + C d\psi^2 \qquad (1)$$

où B et C sont des fonctions de ρ, θ, ψ.

39. J'examinerai seulement quelques cas particuliers de la formule (1).

Supposons dans cette formule $B = \rho^2$ et $C = \rho^2 \sin^2\theta$; il vient

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2 \qquad (2)$$

et une transformation connue ramène cette formule à la suivante :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \qquad (3)$$

Les formules (2) et (3) donnent, comme on sait, la géométrie euclidienne.

Je citerai encore les deux formules suivantes :

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2 \sin^2 \frac{\rho}{R} d\theta^2 + R^2 \sin^2 \frac{\rho}{R} \sin^2\theta\, d\psi^2$$

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2 \operatorname{sin\,hyp.}^2 \frac{\rho}{R} d\theta^2 + R^2 \operatorname{sin\,hyp.}^2 \frac{\rho}{R} \sin^2\theta\, d\psi^2.$$

La première donne la géométrie riemannienne, la seconde la géométrie lobatcheffskienne.

Ce qui caractérise ces géométries, c'est que les surfaces géodésiques y sont des surfaces à courbure constante $\frac{1}{R^2}$ ou $-\frac{1}{R^2}$.

Je ne développerai pas davantage ces considérations : ce que je viens d'en dire suffit pour en montrer la portée.

40. En résumé, si j'écarte le principe de l'égalité géométrique des figures, c'est-à-dire de la coïncidence de deux figures par su-

perposition, la géométrie d'un système donné de points devient indéterminée. Mais si, ces points étant rapportés à un système de coordonnées, je me donne, arbitrairement d'ailleurs, la formule de l'élément linéaire, il en résulte pour ces points une géométrie qui est simplement relative à la formule adoptée pour l'élément linéaire : c'est-à-dire que pour les mêmes points une autre formule donnerait une autre géométrie.

Ainsi, soit un système de points formant une surface ; tant qu'on ne s'est pas donné la formule de l'élément linéaire, cette surface est géométriquement indéterminée : puis, suivant la formule qu'on adopte pour l'élément linéaire, la géométrie de cette surface peut être la géométrie du plan euclidien ou non euclidien, la géométrie de la sphère ou enfin la géométrie d'une surface euclidienne ou non euclidienne quelconque. Dans cette géométrie nouvelle, l'idée qu'une figure peut se déplacer en restant géométriquement égale à elle-même n'a aucun sens : mais, une fois l'élément linéaire défini, deux figures peuvent, par rapport à cet élément tel qu'on l'a défini, être *numériquement* égales, c'est-à-dire avoir toutes leurs dimensions *numériquement égales :* cette égalité d'ailleurs est seulement relative à l'élément linéaire considéré et cesserait d'exister si l'on adoptait un autre élément linéaire.

Enfin, il va de soi que toute surface peut être envisagée comme une surface à courbure constante pour un élément linéaire convenablement choisi.

Ces considérations montrent bien la portée de cette géométrie que j'ai appelée numérique parce que c'est seulement sous la forme de nombres égaux que l'idée d'égalité y est introduite.

La notion cellulaire et les *cellules trachéales* [1],

par M. A. Prenant.

La notion cellulaire suppose chez la cellule plusieurs caractères nécessaires.

La cellule doit être génétiquement *une ;* elle ne peut (sauf dans le cas de la conjugaison sexuelle) devoir son origine à deux ou plusieurs cellules, qui se seraient fusionnées pour la produire, comme on l'a cru pendant longtemps pour l'œuf des Platodes et des Hydroméduses, et comme K. v. Bardeleben l'avait supposé pour le spermatozoïde des Mammifères.

La cellule doit être *définie* dans sa forme, *limitée* et *individualisée*. Une masse informe et illimitée, telle qu'un *Bathybius,* ne serait pas une cellule gigantesque. L'individualisation, l'autonomie, ne sont pas moins nécessaires à la cellule que la définition de la forme et que la limitation des contours. On sait qu'il existe dans l'organisme des étendues, quelquefois immenses, de protoplasme semé de noyaux ; en découpant autour de chaque noyau un territoire protoplasmique, on obtient l' « énergide » de Sachs et de Kölliker. On sait aussi que des cellules, d'ailleurs en apparence bien délimitées, sont néanmoins unies entre elles par des « ponts intercellulaires » de substance protoplasmique, de sorte que ces cellules forment un tout cohérent, un « symplaste », au lieu de constituer autant d'individus distincts. Mais si la théorie des énergides et la théorie du symplaste peuvent être appelées à remplacer quelque jour la *théorie* cellulaire, elles ne peuvent rien contre la *notion* cellulaire, due à l'observation mille et mille fois faite par chacun de nous, d'éléments individualisés, de forme bien définie, à contours plus ou moins nettement limités, que nous appelons des cellules.

La cellule doit être *indivisible*. Artificiellement divisée, elle donne naissance à deux fragments qui ne sont pas des cellules, mais pourront seulement le devenir si certaines conditions ont été réalisées lors de la fragmentation ; il en est de la mérotomie d'une cellule, d'un infusoire, comme de la segmentation d'un ver de

1. Communication faite à la Société des sciences le 1er mars.

terre. En se divisant naturellement, la cellule disparaît en donnant naissance à deux cellules nouvelles : ainsi un Protozoaire ou un Protophyte, ainsi la cellule de tissu chez le Métazoaire et le Métaphyte.

L'*impénétrabilité* paraît être enfin l'un de ces caractères indispensables que la cellule doit encore posséder ; c'est le seul sur lequel je désire attirer l'attention dans cette communication.

La cellule est impénétrable et intangible. Elle peut envahir tout ce qui l'entoure, rayonner au dehors par ses prolongements, par ses produits : ainsi la cellule nerveuse pousse au loin ses prolongements ; la cellule glandulaire évacue ses produits à l'extérieur ; la cellule conjonctive différencie autour d'elle ses fibrilles collagènes qui lui deviennent ensuite étrangères. Elle n'est pas envahie par les choses qui l'environnent ; et rien de ce qui est autour d'elle ne la pénètre, si ce n'est ce qu'elle mange, ce qu'elle phagocyte, c'est-à-dire en somme ce que lui imposent le hasard des rencontres d'abord et les lois physiques ensuite. Dans tout autre cas, la surface de la cellule est une barrière, moralement infranchissable, que l'histologiste a pris l'habitude de respecter dans ses descriptions et ses dessins, si faible et si molle que soit du reste physiquement cette barrière. La cellule, décrit et dessine-t-il, est un élément arrondi ou polyédrique, de forme régulière[1]. La cellule est un élément impénétrable et non pénétré ; ce qui lui vaut, dans l'immense majorité des cas, un contour régulièrement géométrique. L'irrégularité, souvent si prononcée, de sa forme n'est pas due à ce qu'elle est découpée profondément par des éléments étrangers qui l'ont pénétrée, mais à ce qu'elle s'est elle-même déchiquetée en projetant au loin des prolongements parfois démesurément ramifiés. Tel est cet attribut de la cellule, qu'on peut nommer l'impénétrabilité.

---

1. De même l'anatomiste, décrivant et figurant la coupe transversale de la moelle épinière, lui donne un contour régulièrement arrondi, se bornant à indiquer çà et là quelques encoches produites par la pie-mère, qui en certains points s'enfonce dans la masse nerveuse. Mais en cela l'anatomiste commet une inexactitude qu'on ne pouvait reprocher à l'histologiste. Les prolongements pie-mériens, extraordinairement ramifiés, ne se mêlent en réalité pas à la substance nerveuse, puisqu'ils en sont séparés, comme on le sait aujourd'hui, par une « limitante névroglique », véritable membrane basale ; de la sorte la moelle épinière est pénétrée par une foule de prolongements conjonctifs qui la découpent très profondément. On refusera donc à cet organe, la moelle épinière, l'attribut d'impénétrabilité que la notion cellulaire reconnaît à la cellule. Par là se mesure toute la distance qui sépare un organe qui n'est qu'un agencement, qu'on peut modifier et déformer, d'une cellule qui est un individu et qui est intangible.

Dans ces derniers temps, la notion cellulaire a paru menacée sur ce dernier point, sur le caractère d'impénétrabilité. Car on a pensé montrer que cette individualité intangible, cet élément rebelle à toute immigration du dehors, avait subi une violation de territoire, était pénétré par des éléments étrangers, par des vaisseaux sanguins et lymphatiques, par des trachées.

Il y a longtemps déjà, Adamkiewicz[1], étudiant la circulation sanguine dans les organes nerveux, trouvait qu'une injection poussée dans les veines pénètre à travers l'espace capsulaire qui entoure la cellule nerveuse et à travers le corps même de la cellule pour parvenir jusqu'au noyau et remplir l'espace nucléaire, réalisant ainsi un capillaire veineux, intracellulaire et central. La communication d'Adamkiewicz ne fut pas prise au sérieux et le fait qu'il y annonçait fut regardé comme dû à un artefact grossier, à la pénétration par effraction de la matière injectée dans le corps cellulaire sous une pression exagérée. Mais dans ces derniers temps, Browicz[2] et Holmgren[3], par l'observation directe, c'est-à-dire en écartant la cause d'erreur qui avait pu vicier l'interprétation du fait découvert par Adamkiewicz, retrouvèrent non seulement dans les cellules nerveuses, mais encore dans les cellules hépatiques, soit des vaisseaux sanguins véritables, soit du moins (Browicz) des canaux intracellulaires qui sont en relation directe avec le système circulatoire. Adamkiewicz et Browicz constatent que ces canaux nourriciers de la cellule peuvent avoir, dans les cellules nerveuses et dans les cellules du foie, une terminaison intranucléaire, que Holmgren continue à considérer comme un fait artificiel. Adamkiewicz[4] se croit en état de généraliser, d'attribuer à toutes les cellules un appareil circulatoire intracellulaire et d'en faire de véritables organes très primitifs.

D'autre part, une communication de Golgi[5] a inauguré une sé-

---

1. Adamkiewicz, *Der Blutkreislauf der Ganglienzelle.* Berlin, Hirschwald, 1896.

2. Browicz, « Ernährungswege in der Leberzelle ». (*Bulletin international de l'Académie des sciences de Cracovie,* juillet 1899.) [Avec le résumé des resultats consignés par l'auteur dans une série de communications sur le même sujet, faites à la même Académie en 1897 et 1898.]

3. Holmgren, « Zur Kenntniss der Spinalganglienzellen des Kaninchens und des Frosches ». (*Anat. Anzeiger,* Bd XVI, n° 7, 1899.)

4. Adamkiewicz, *Die Kreislaufstörungen in den Organen des Centralnervensystems.* Köllner, Berlin u. Leipzig, 1899. — « Zum Blutgefässapparat der Ganglienzelle. » (*Anat. Anzeiger,* Bd XVII, 1900.)

5. Golgi, « Intorno alla struttura delle cellule nervose ». — « Sulla struttura delle

rie de recherches desquelles résulte l'existence, dans les cellules nerveuses, d'un système de canaux diversement contournés et extrêmement nombreux. Golgi et Veratti[1] trouvèrent un réseau de filaments, que Golgi nomma l' « appareil endocellulaire » de la cellule nerveuse. Nelis[2] aperçut un boyau pâle, pelotonné sur lui-même, dont l'axe était occupé par un filament colorable. Holmgren[3] découvrit dans la cellule nerveuse de véritables canaux, dont Studnicka[4] connaissait déjà et put confirmer l'existence, et que, d'après ce dernier auteur, Nansen[5] même avait déjà décrits autrefois. Holmgren, qui a donné sur ce sujet les renseignements les plus détaillés, a retrouvé ces canaux dans un grand nombre de Vertébrés et chez les Crustacés. Il a montré qu'ils sont tapissés par une paroi nette, que divers colorants peuvent teindre électivement. Leur présence est en rapport avec l'existence de la « substance tigroide », secrétée par les cellules nerveuses ; et leur développement va de pair avec celui de cette substance. L'abondance de ces canaux intracellulaires est mise en évidence surtout par l'action de l'électricité sur les cellules nerveuses ; à la suite de l'excitation électrique, ces cellules montrent une quantité de canaux qu'on ne voyait pas auparavant et dont on ne distinguait qu'un très petit nombre. Contrairement à Studnicka, pour lequel les canaux résultent de la confluence d'alvéoles intracellulaires, ils ne se sont pas, selon Holmgren, développés à l'intérieur de la cellule, mais ils proviennent du dehors, d'où ils ont pénétré dans le corps cellulaire. Ils représentent, d'après lui, une sorte d'appareil canaliculaire lymphatique. Il en conclut que les cellules nerveuses sont

---

cellule nervose dei gangli spinali. » (*Bollettino della Societa medico-chirurgica di Pavia*, 1898.) — « Sur la structure des cellules nerveuses. » — « Sur la structure des cellules nerveuses des ganglions spinaux. » (*Arch. ital. de Biologie*, t. XXX, 1898. — *Anatomische Hefte*, H. XXXVIII, 1899.)

1. Veratti, « Ueber die feinere Structur der Ganglienzellen des Sympathicus ». (*Anat. Anzeiger*, 1898.)

2. Nelis, « Un nouveau détail de structure du protoplasma des cellules nerveuses (état spirémateux du protoplasme) ». (*Bull. Acad. des Sc. de Belgique*, 1899.)

3. Holmgren, « Zur Kenntniss der Spinalganglienzellen des Kaninchens und des Frosches ». — « Weitere Mitteilungen uber den Bau der Nervenzellen. » (*Anat. Anzeiger*, 1899, Bd XVI, n° 7 et n°s 15-16.) — « Noch weitere Mitteilungen uber den Bau der Nervenzellen verschiedener Tiere. » (*Anat. Anzeiger*, Bd XVII, n°s 6-7, 1900.)

4. Studnicka, « Ueber das Vorkommen von Kanälchen und Alveolen im Körper der Ganglienzellen und in dem Axencylinder einiger Nervenfasern der Wirbeltiere ». (*Anat. Anzeiger*, Bd XVI, n°s 15-16, 1899.)

5. Nansen, « The Structure and Combination of the histological Elements of the Central Nervous System ». (*Bergens Museum Aarsberetning*, 1896.)

des éléments beaucoup plus hautement individualisés (il eût mieux valu dire « organisés ») qu'on ne l'avait jusqu'alors supposé.

Si l'interprétation que donne Holmgren pour les canaux intracellulaires est exacte, la cellule nerveuse serait pénétrée par des tubes extrêmement ramifiés et, par suite, aurait en réalité une forme extraordinairement irrégulière et compliquée, telle qu'elle résulterait du découpage de tous les tubes qui s'enfoncent dans le corps cellulaire.

Il y a un troisième cas où la cellule ne semble plus être non plus l'élément impénétrable que suppose la notion cellulaire. C'est celui des cellules trachéales, c'est-à-dire des cellules qui sont en rapport intime avec des trachées.

On sait depuis fort longtemps que les trachées, au lieu de cheminer, comme d'ordinaire, entre les éléments cellulaires et de se terminer entre eux par des ramifications libres, les traversent ou peuvent trouver à leur intérieur leur terminaison. Il y a donc des cellules traversées par les trachées et il existe aussi des cellules terminales de trachées. L'une et l'autre catégories sont connues et ont été décrites dans divers tissus par un assez grand nombre d'auteurs (Leydig[1], Kupffer[2], H. Meyer[3], v. Wistinghausen[4], M. Schultze[5], Wielowiejski[6], Leydig[7], R. y Cajal[8], Lowne[9], Holmgren[10], Pantel[11]), dont je ne puis songer dans cette note à détailler les descriptions.

---

1. Leydig, *Untersuchungen zur Anatomie und Histologie der Thiere*, Bonn, 1883, p. 72. — « Anatomisches und Histologisches über die Larve von *Corethra plumicornis*. » (*Zeitschr. f. wiss. Zool.*, Bd III.)

2. Kupffer, « Das Verhältniss von Drusennerven zu Drüsenzellen ». (*Arch. f. mikr. Anat.*, Bd IX, 1873.)

3. H. Meyer, « Ueber die Entwickelung des Fettkörpers der Tracheen, etc. ». (*Zeitschr. für wiss. Zool.*, Bd I.)

4. V. Wistinghausen, « Ueber Tracheenendigungen in den Sericterien der Raupen ». (*Zeitschr. f. wiss. Zool.*, Bd XLIX.)

5. M. Schultze, « Zur Kenntniss der Leuchtorgane von *Lampyris splendidula* ». (*Arch. f. mikr. Anat.*, Bd I.)

6. Wielowiejski, « Studien über die Lampyriden ». (*Zeitschr. f. wiss. Zool.*, Bd XXXVII.)

7. Leydig, *Zelle und Gewebe*. Bonn, 1885.

8. R. y Cajal, « Coloration par la méthode de Golgi des terminaisons des trachées, etc. ». (*Zeitschr. f. wiss. Mikr.*, Bd VII.)

9. Lowne, *Anatomy and Physiology of the Blow-Fly* (*Calliphora erythrocephala*). London, 1892-1895 (cité par Pantel).

10. Holmgren, « Ueber das respiratorische Epithel der Tracheen bei Raupen ». (*Zoologiska Studier. Festskrift Wilh. Lilljeborg*. Upsala, 1896.)

11. Pantel, « Essai monographique sur une larve parasite du groupe des tachinaires ». (*La Cellule*, t. XV, 1898.)

Les cellules traversées par les trachées sont des éléments ramifiés dans lesquels un rameau trachéal pénètre, puis se ramifie, et des prolongements desquels les ramifications trachéales semblent sortir pour aller plus loin rencontrer et pénétrer d'autres cellules ou pour se terminer librement. En réalité, d'après Pantel, ces ramifications, à leur sortie apparente du corps cellulaire, seraient accompagnées et engainées par une mince couche de protoplasme cellulaire, de sorte que la fine trachée (« trachéole » de l'auteur) ne cesserait pas d'être intracellulaire[1].

Les cellules terminales de trachées sont moins connues et plus rares que les précédentes. J'en ai découvert dans le corps des larves d'Œstre un spécimen très démonstratif[2]. La dissection de ces larves montre, dans le tiers ou le quart postérieur du corps, un organe rouge (sans doute œnocytique), composé de cellules volumineuses, piriformes, auxquelles se distribuent de nombreuses trachées. Cet organe rouge est prolongé en avant, sans aucune solution de continuité, par un organe adipeux, qui reçoit lui aussi un contingent important de ramifications trachéennes. Dans chacune des cellules de l'organe rouge, comme aussi dans chaque cellule adipeuse, pénètrent une ou plusieurs branches trachéales. Ces branches, à l'intérieur de la cellule, se ramifient en une arborisation puissante, très régulière, moins abondante et plus irrégu-

1. Mais elle demeure extracellulaire par rapport aux cellules de l'organe auquel les trachées se distribuent. C'est du moins ce que Holmgren (*loc. cit.*) pense avoir établi pour les trachées de la glande séricigène des Chenilles. Il a montré que ces trachées, qui se terminent par un réseau de tubes très fins contenus dans des gaines protoplasmiques nucléées, ne sont jamais en contact intime avec le protoplasma des cellules de la glande séricigène ; car les trachées refoulent devant elles en se développant la membrane propre de la glande, et ne sont ainsi jamais hypolemmales mais demeurent épilemmales, quelque profondément qu'elles s'enfoncent dans le corps cellulaire. Avec Kölliker, contre Leydig et d'autres auteurs, Holmgren conclut en disant que les trachées ne sont que péricellulaires, jamais intracellulaires. Si les lumières des trachées se terminent donc à l'intérieur de cellules trachéales ou tout au moins de gaines protoplasmiques nucléées, si elles sont par conséquent intracellulaires ou du moins intraprotoplasmiques à leur extrémité périphérique, ces cellules trachéales terminales, ces gaines protoplasmiques ultimes demeurent strictement en dehors des cellules (ici les cellules séricigènes) auxquelles les trachées se distribuent. Il y aurait donc ici pénétration véritable, immigration secondaire des trachées dans des cellules étrangères au système trachéen.

2. On trouvera, dans un travail qui doit paraître incessamment dans les *Archives d'anatomie microscopique*, t. III, fasc. 4, une description détaillée de ces cellules, ainsi que des renseignements bibliographiques sur la question. Je dois me borner ici aux faits qui sont essentiels au point de vue qui m'occupe. Je puis renvoyer aussi à une communication préliminaire : « Terminaison intracellulaire et réellement cytoplasmique des trachées chez la larve de l'Œstre du cheval. » (*Comptes rendus de la Soc. de Biologie*, 10 juin 1899.)

lière dans les cellules graisseuses que dans les cellules de l'organe rouge. Je me suis appliqué à élucider, sur des préparations spéciales et à l'aide de forts objectifs, la question du mode de terminaison exact des plus fins rameaux trachéens. Après avoir cru qu'ils se continuent avec des travées épaissies et différenciées de

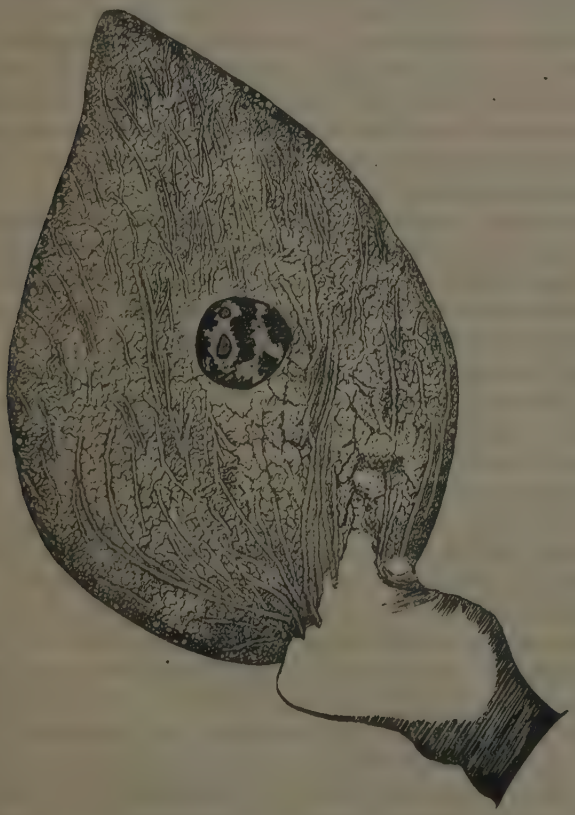


FIG. 1. — *Cellule trachéale de l'organe rouge*, grossie 370 fois.

la charpente cytoplasmique, il m'a semblé bien plutôt que ces travées n'ont que des rapports de contiguïté avec les ramilles terminales des trachées. Je ne puis cependant considérer comme définitivement tranchée par mes observations cette question, si importante à un point de vue général.

Au sujet des cellules trachéales en général, et en particulier de celle des larves d'Œstre, qui représentent le type le plus parfait qu'on en connaisse, se pose un problème analogue à celui qui a été discuté à propos des cellules nerveuses. Il a été dit plus haut que les canaux intracellulaires des éléments nerveux avaient été considérés par Studnicka comme formés sur place, aux dépens d'alvéoles du cytoplasme et, par conséquent, représentaient pour lui des formations intrinsèques de la cellule nerveuse ; Holmgren, au contraire, en a fait des formations étrangères à la cellule, où elles ont dû pénétrer secondairement. N'ayant dans cette question aucune compétence, je dois m'abstenir de me prononcer, tout en avouant mes préférences pour la première interprétation.

Les trachées intracellulaires des cellules d'Œstre sont-elles à leur tour une production endocellulaire, une différenciation du cytoplasme de l'élément trachéal ? Ou bien résultent-elles de la pénétration secondaire d'une trachée dans la cellule ? C'est ce qu'il m'est impossible de décider en l'absence de toute donnée embryologique. Je n'ai pu, en effet, me procurer les matériaux nécessaires pour l'étude du développement des cellules trachéales de l'Œstre. Faute de la preuve irrécusable fournie par l'embryologie, tout au moins peut-on se contenter de probabilités. Elles seront tirées de l'histologie comparée.

On sait que les glandes ordinaires, celles des Vertébrés par exemple, sont des invaginations issues des épithéliums qui garnissent la surface de la peau et des muqueuses, qu'elles sont creusées d'un canal qui parcourt la glande sur toute sa longueur, que ce canal, à son extrémité profonde, pénètre entre ses cellules de bordure en formant des canalicules intercellulaires et que de ceux-ci peuvent naître enfin des diverticules qui s'enfoncent dans le corps même des cellules et forment des canalicules intracellulaires. Très nombreuses sont aujourd'hui les observations d'après lesquelles le canal glandulaire a ses sources dans un grand nombre de canalicules intracellulaires. Sur cette origine du canal de la glande on ne discute plus ; le seul point controversé est celui de savoir si ces canalicules intracellulaires sont des lacunes temporaires, formées à l'occasion du produit à excréter et au moment seulement de l'excrétion cellulaire, ou bien s'ils sont des conduits permanents, pourvus d'une paroi propre.

Il existe chez un grand nombre d'Invertébrés des glandes qui

se distinguent des précédentes par plusieurs caractères, tout en étant construites essentiellement sur le même type.

Elles ont une constitution beaucoup plus simple; quelques cellules seulement les forment; une seule cellule peut même suffire à constituer une glande (glande unicellulaire). Il en est ainsi pour les exemples devenus classiques des glandes segmentaires des Hirudinées[1], des glandes des pattes de *Phromina*[2], des glandes odorantes du *Blaps*[3], etc., et en général des glandes cutanées de beaucoup d'Insectes et de Crustacés.

Les glandes des Invertébrés précitées diffèrent encore sur un autre point de celles des Vertébrés. Les canalicules intracellulaires, creusés dans la cellule sécrétante, qui forment les origines du canal glandulaire et qui en sont les premiers affluents, ne sont plus, comme chez les Vertébrés, des espaces mal définis, à paroi peu ou point distincte, des lacunes plutôt que des conduits. Ce sont ici de vrais canaux, permanents, à paroi propre, souvent chimiquement différenciée. On n'hésitera plus, cette fois, à affirmer que le canal glandulaire prend sa source dans des canalicules intracellulaires, dont il est le prolongement direct. De toutes ces glandes d'Invertébrés, je n'en veux retenir qu'une : celle de l'urostyle du Cloporte qui, signalée par Lereboullet, a été décrite par Weber[4], Huet[5] et Ide[6]. Une cellule lobée, profondément découpée, pourvue d'un ou deux noyaux, creusée d'une arborescence de canalicules, forme la partie sécrétrice de la glande. Un canal assez large, bordé par une mince couche de protoplasma, portant au voisinage de la cellule sécrétrice deux noyaux aplatis et collectant tous les canalicules de la partie sécrétante, constitue le conduit excréteur.

Quel est, à présent, le schéma d'un système trachéen ordinaire? C'est à l'embryologie qu'on doit en emprunter l'idée. Elle nous apprend, grâce aux travaux de Kowalewski, Bütschli, Hatschek, que les trachées sont des invaginations épidermiques et nous fait voir dans l'appareil trachéen une invagination glandulaire extraordi-

1. Bolsius, « Les organes segmentaires des Hirudinées ». (*La Cellule*, t. V, 1889, et t. VII, 1891.)
2. Ide, « Glandes cutanées à canaux intracellulaires chez les Crustacés édriophthalmes ». (*La Cellule*, t. VII, 1891.)
3. Gilson, « Les glandes odorifères du *Blaps mortisaga* ». (*La Cellule*, t. V, 1889.)
4. M. Weber, « Anatomisches über Trichonisciden ». (*Arch. für mikr. Anat.*, 1881.)
5. Huet, « Nouvelles recherches sur les Crustacés Isopodes ». (*Journ. de l'Anat. et de la Phys.*, 1883.)
6. Ide, *loc. cit.*

nairement rameuse, dont toutes les cellules composantes sont de simples cellules de paroi, de forme très plate.

Pour réaliser avec cet appareil trachéen ordinaire l'organe rouge des larves d'Œstre avec ses cellules trachéales terminales à trachées intracellulaires, il suffit de grossir les cellules les plus périphériques de l'arborisation trachéenne, de telle façon que ces cellules, amplifiées, devenues de gros éléments arrondis, arrivent à englober toute une partie terminale de cette arborisation, dont les canaux ultimes deviendront ainsi intracellulaires. Ce n'est là évidemment qu'une façon de faire comprendre comment peut être obtenu le résultat définitif, la présence de trachées intracellulaires[1].

En réalité, l'accroissement des cellules terminales ne succède pas à la formation des dernières ramifications trachéennes ; les cellules n'englobent pas des tubes trachéens préformés. Il est vraisemblable que la cellule, à mesure de son accroissement et de sa transformation, produit en elle-même, par autodifférenciation de son protoplasma, aux dépens de vacuoles cellulaires, les trachées qu'on trouvera plus tard dans son intérieur. En d'autres termes, les tubes trachéens ultimes naissent intracellulaires. La formation intracellulaire de trachées a d'ailleurs été vue par plusieurs auteurs : par H. Meyer[2] chez les larves de Lépidoptères et d'Ichneumons, par Weismann[3] chez les embryons des mouches, par V. Wielowiejski[4] chez le Lampyre dans les organes graisseux et reluisants et dans les organes génitaux, par Emery[5] dans le corps adipeux de la Luciole, par Leydig[6] chez la larve de Corèthre, dans les glandes séricigènes des Chenilles, par Pantel[7] chez une larve de *Thrixion*. On peut ajouter à cette liste les auteurs mêmes, tels que v. Wistinghausen[8], Holmgren[9], qui ont décrit des cellules terminales et des réseaux terminaux de trachées, et qui ont ainsi

1. Cette explication, toute grossière qu'elle est, me paraît encore préférable à celle que donne C. Schæffer : « Beiträge zur Histologie der Insekten » (*Zool. Jahrbücher, Abth. f. Anat.*, Bd III, 1889). Il suppose qu'une cellule de la paroi trachéale devient terminale si elle demeure seule à limiter la lumière de la trachée, les autres cellules de paroi, rejetées excentriquement, ayant cessé de border cette lumière.
2. H. Meyer, *loc. cit.*
3. Weismann, « Entwickelung der Dipteren im Ei ». (*Zeitschr. f. wiss. Zool.*, Bd XIII.)
4. V. Wielowiejski, *loc. cit.*
5. Emery, « Untersuchungen über *Luciola italica* ». (*Zeitschr. f. wiss. Zool.*, Bd XL.)
6. Leydig, *loc. cit.*
7. Pantel, *loc. cit.*
8. V. Wistinghausen, *loc. cit.*
9. Holmgren, *loc. cit.*

admis la naissance intracellulaire des lumières des trachées les plus fines. On peut aussi citer le cas du « peloton trachéal » qui se forme chez certaines Chenilles au-dessous du disque imaginal trachéal; le tube trachéen pelotonné est ici nettement d'origine intracellulaire (Schæffer[1]). Pantel, renouvelant une interprétation

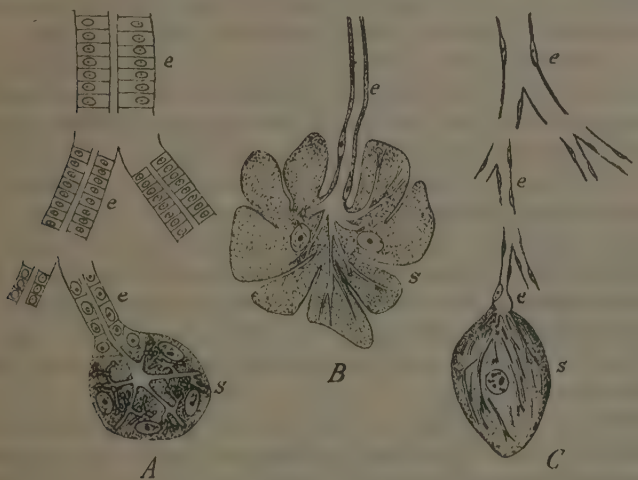


Fig. 2. — *Schéma pour la comparaison des canaux intracellulaires des glandes avec les trachées intracellulaires de l'organe rouge.*

A. Glande de Vertébré. — B. Glande de l'Urostyle du Cloporte (imitée de Ide). — C. Organe rouge de la larve d'Œstre.

Dans les trois dessins : *e*, la partie excrétrice ; *s*, la où les cellules sécrétrices contenant les canaux et trachées intracellulaires.

autrefois donnée par Leydig, a supposé que la formation d'une « trachéole » dans le protoplasma commence « par une sécrétion intime du protoplasme, dont le produit s'accumulerait suivant les directions marquées pour le trajet de la future trachéole, et constituerait une véritable *vacuole filiforme*[2] »; il ajoute que c'est un caractère habituel des vacuoles d'être limitées par une couche différenciée de protoplasma, qui, dans le cas particulier, deviendrait la paroi de la vacuole.

Il est à peine besoin de faire ressortir maintenant l'analogie très

1. Schæffer, *loc. cit.*

2. On comparera avec intérêt ce mécanisme de la genèse des trachées avec celui que A. Graf a décrit dans la formation des canaux intracellulaires des glandes segmentaires chez les Hirudinées.

grande qui existe entre l'appareil trachéen des larves d'Œstre, avec ses cellules terminales, et certaines glandes, notamment celles de l'urostyle du Cloporte. Ici comme là, nous trouvons : une partie proximale rétrécie en un conduit excréteur, limitée par des cellules de paroi très aplaties ; une partie distale ou terminale, représentée ici par les cellules trachéales, là par la ou les cellules sécrétantes, les unes et les autres avec leurs ramifications intracellulaires.

A défaut de la preuve embryologique, seule convaincante, montrant que les cellules terminales à trachées intracellulaires ne doivent pas leur origine à une pénétration des extrémités de la trachée à l'intérieur des cellules, mais que les trachées intracellulaires sont produites par une différenciation locale des cellules terminales de l'arborisation trachéenne, on devra se contenter des analogies que je viens d'exposer et qui me paraissent assez probantes. On admettra donc que les trachées n'ayant pas pénétré dans la cellule, qui tout au contraire les a formées sur place, cette cellule a conservé ce caractère d'impénétrabilité qui fait nécessairement partie de la notion cellulaire. Avec les cellules trachéales, la notion cellulaire ne perd donc rien de sa valeur.

Il faut, pour terminer, soulever encore et résoudre une dernière difficulté. J'ai dit plus haut que l'organe rouge œnocytique des larves de l'Œstre du cheval se prolonge en avant par un organe adipeux, si bien qu'il y a continuité parfaite entre les deux organes, et j'ai indiqué que les cellules adipeuses ont le même attribut essentiel que les cellules trachéales, c'est-à-dire que des trachées se ramifient dans leur intérieur. On a déjà, du reste, signalé ailleurs la terminaison de trachées dans des cellules graisseuses. Comme les cellules adipeuses sont regardées généralement comme des éléments mésenchymateux, que les trachées sont au contraire des invaginations épithéliales, le schéma que je viens de donner pour l'organe rouge ne paraît plus applicable aux organes graisseux ; car on ne peut construire une glande dont une partie serait épithéliale et dont la portion terminale serait mésenchymateuse. Il faudrait donc admettre, pour toutes les cellules adipeuses qui contiennent des trachées intracellulaires, et pour celles des larves d'Œstre en particulier, que la pénétration des trachées épithéliales dans ces éléments mésenchymateux a été secondaire. Avec les cellules adipeuses trachéifères, la notion cellulaire perdrait le caractère d'impénétrabilité de la cellule. Il n'est toutefois pas prouvé

que les cellules adipeuses qui contiennent des trachées soient bien de nature mésenchymateuse. Il est même possible que certaines cellules adipeuses ou même la totalité du corps adipeux proviennent de l'ectoderme.

Cette question de l'origine du corps adipeux chez les Insectes a été très discutée. On sait que les éléments adipeux sont l'une des formes, la principale, c'est-à-dire la plus répandue et la plus importante au point de vue physiologique, du « tissu hématique » de Wielowiejski ou « tissu hémostéatique » de Graber, qui comprend outre les cellules adipeuses, les œnocytes, les corpuscules sanguins et les cellules péricardiales. Les éléments divers ont entre eux d'étroites affinités génétiques, de telle sorte que l'origine première de l'un d'eux, des œnocytes par exemple, étant connue, celle d'un autre, des éléments adipeux par exemple, doit être la même. Les œnocytes sont, selon Graber, la forme primitive par laquelle passent la plupart des éléments du corps adipeux[1]. Comme on a reconnu (Tichomiroff, Verson et Bisson, Graber) la provenance ectodermique des œnocytes, qui ne sont que des cellules ectodermiques grossies et tombées dans la cavité générale, il suit de là que les cellules adipeuses doivent avoir la même origine. Du reste, quelques auteurs ont même montré l'origine directe des éléments adipeux aux dépens de l'ectoderme. C'est ainsi que Weismann a établi que, chez les embryons de Muscides, « les lobes du corps adipeux proviennent totalement des mêmes cellules embryonnaires que les cordons tracheaux (qui, comme on le sait, dérivent d'invaginations ectodermiques) ». Plus récemment, C. Schæffer, sur le même objet, a même vu que le corps adipeux provient en majeure partie de la matrice des trachées elle-même. Sans insister sur cette question, il paraît donc acquis par un certain nombre d'observations qu'il existe chez les Insectes deux sortes génétiques de cellules adipeuses, les unes mésenchymateuses, les autres ectodermiques. Il est vraisemblable que déjà rentrent dans la deuxième catégorie toutes les cellules adipeuses dans lesquelles on a vu se terminer des trachées, notamment celles de l'organe adipeux chez les larves de l'Œstre du cheval. Car les connexions réalisées entre les tra-

1. C'est ce que confirment mes observations sur l'Œstre du cheval ; car outre qu'il n'y a aucune ligne de démarcation entre l'organe rouge et l'organe adipeux, on peut suivre pas à pas la transformation des cellules rouges, œnocytiques, en cellules grais-

chées et les cellules graisseuses à l'état adulte ne seront ainsi que le maintien pur et simple de celles qu'elles avaient entre elles dans l'ébauche ectodermique commune. On sera ainsi ramené au schéma que je donnais plus haut pour l'organe rouge, œnocytique, de l'Œstre, à celui de la glande urostylienne des Cloportes et à celui des glandes cutanées en général.

En résumé, à part certaines observations de pénétration de vaisseaux sanguins à l'intérieur des cellules nerveuses, à part l'immigration de cellules trachéales et de réseaux trachéaux terminaux dans les cellules séricigènes des Chenilles, tous les canaux qu'on a décrits dans ces derniers temps, soit dans les cellules nerveuses, soit dans les cellules terminales des glandes cutanées et des trachées, paraissent être dus plutôt à une différenciation locale du protoplasma de ces cellules qu'à la pénétration secondaire de canaux extérieurs dans le corps cellulaire. Il n'y a donc là que des exceptions apparentes à la règle qui fait de la cellule un élément impénétrable, tel que nous le donne la notion cellulaire.

Principes généraux de la chirurgie du cœur[1], par M. Michel.

Dans cette conférence, le but de l'auteur a été de donner une revue générale de cette question de thérapeutique chirurgicale, de prouver qu'il est permis aujourd'hui, en présence d'une plaie du cœur, de poser des indications bien nettes d'une intervention, que cette intervention doit rentrer dans le cadre de ce que l'on appelle la chirurgie d'urgence.

Le cœur était resté longtemps étranger aux progrès de la chirurgie viscérale. De tout temps, on avait attribué un pronostic fatal aux plaies de cet organe ; de plus, sa vascularisation, sa mobilité, ses variations incessantes de volume, de forme et de consistance, semblaient par avance condamner toute tentative opératoire.

L'auteur rappelle de nombreux faits cliniques qui prouvent que le pronostic est loin d'être toujours fatal, que toutes les plaies du cœur ne sont ni constamment, ni immédiatement mortelles ; que,

1. Communication faite à la Réunion biologique le 3 mars.

si elles ne tuent point, le plus souvent elles laissent le temps d'intervenir.

Il montre ensuite quelles sont les données expérimentales et scientifiques qui permettent cette intervention.

Il étudie surtout la compression du cœur par un épanchement sanguin, cause la plus fréquente de la mort, si celle-ci n'est pas survenue à la suite de lésions des piliers et des valvules, ou à la suite d'une excitation directe des ganglions nerveux du cœur.

Or, dans ces cas de compression par hémo-péricarde, il est permis d'intervenir et d'aller tarir la source de l'hémorragie, soit en posant une ligature sur le vaisseau qui saigne, soit en suturant le myocarde.

Nombreuses sont les expériences qui prouvent la réalité de ces faits.

Ces expériences ont précédé les interventions. L'auteur rapporte dix observations de suture péricardique ; cinq furent suivies de guérison. Il rapporte ensuite cinq interventions directes sur le cœur ; trois ont été suivies de succès.

Il signale aussi une observation d'un chirurgien russe, publiée dans la *Revue de chirurgie* de 1899, observation qui est une véritable expérience : on put, en effet, se livrer à des explorations diverses, introduction d'aiguilles dans le ventricule, palpation plus ou moins forte de l'organe sorti du péricarde, sans que le fonctionnement fût troublé.

On peut donc se demander aujourd'hui quelles sont les indications d'une intervention.

Le diagnostic d'une plaie du cœur étant le plus souvent évident grâce à l'étude du blessé et de la blessure, la marche des symptômes servira de guide, les deux grandes indications qui dirigeront le chirurgien seront l'hémorragie et l'infection, l'hémorragie étant la plus importante.

Après quelques mots de technique, l'auteur conclut en disant que, d'après les expériences, d'après les observations cliniques suivies de succès, on peut être audacieux et que, pouvant être audacieux, le chirurgien interviendra plus vite et pourra sauver la vie des blessés.

N'existerait-il qu'une chance de succès, cette chance il faut la tenter.

Présentation d'une poule à plumage de coq[1], par M. Cuénot.

On sait que les Faisans mâles et femelles sont très différents d'aspect et de couleur; c'est un des cas les plus accentués de *dimorphisme sexuel;* or, M. Cuénot présente un Faisan argenté (*Nycthemerus argentatus* Sw.), femelle authentique puisqu'elle a pondu des œufs pendant longtemps, qui a extérieurement tous les caractères du mâle, grandes plumes blanches de la queue, ventre bleu foncé et un grand ergot : c'est ce qu'on appelle un *Faisan coquard.* Il montre que ce phénomène de réversion vers l'autre sexe ne se produit que lorsque la poule cesse de pondre, et qu'il suit l'atrophie de l'ovaire. Chez les Faisans et bien d'autres animaux, tout individu a en puissance les caractères externes de l'un et l'autre sexe ; mais tant que les glandes mâles ou femelles sont actives, les caractères du sexe correspondant sont seuls visibles, les autres sont rudimentaires ou latents. Dès que les glandes génitales cessent de fonctionner, soit à cause de l'âge (castration physiologique), soit à la suite d'une opération chirurgicale, les caractères de l'autre sexe ont une tendance à s'exprimer à leur tour, comme si leur développement n'était arrêté que par la présence de la glande fonctionnelle. Chez cette vieille poule à ovaire atrophié, les caractères mâles ont réapparu avec une telle intensité que les caractères externes de la femelle ont presque tous disparu.

Réunion biologique du 16 mars 1900.

Action du courant continu sur la respiration du muscle en état de survie, par M. Guilloz.

M. Guilloz, ayant constaté que le courant continu appliqué à des goutteux et à des obèses amène un amaigrissement notable en même temps qu'une amélioration de l'état général, a voulu se rendre compte du mode d'action de ce courant ; en opérant sur des muscles de grenouille, séparés du corps et soumis au courant

1. Communication faite à la Réunion biologique le 3 mars.

continu, et en se mettant à l'abri de toute cause d'erreur, il a pu voir que ce muscle absorbait beaucoup plus d'oxygène qu'un muscle normal ; il brûle mieux, ce qui explique sans doute l'amaigrissement des ralentis de nutrition soumis au traitement électrothérapique.

Présentations : M. Charbonnier présente des mâchoires et une langue hypertrophiées de bœufs atteints d'actinomycose, maladie qui n'est pas rare en Lorraine.

M. Jacques présente des préparations de cornée imprégnée au bleu de méthylène, qui montrent des filets nerveux de l'épithélium, et insiste sur l'exactitude de la méthode.

Les cellules trachéales de la larve de l'Œstre du Cheval,
par M. Prenant.

La dissection des larves de l'Œstre du Cheval apprend que ces larves renferment un organe pair, allongé, blanc et graisseux dans ses deux tiers antérieurs, rouge et non graisseux dans son tiers postérieur. La partie postérieure, qu'on peut appeler l'organe rouge, se compose de cellules volumineuses, dans chacune desquelles une trachée pénètre et se ramifie abondamment, d'où le nom de « cellules trachéales » qui convient à ces éléments. Le mode de terminaison des plus fins ramuscules de ces trachées intracellulaires est difficile à élucider ; ces ramuscules paraissent se terminer librement ; mais ils ont des rapports intimes avec des travées de cytoplasme différencié, spécifiquement colorable. Examinant la région de transition entre l'organe rouge et l'organe adipeux, on constate que les cellules trachéales s'y transforment insensiblement en cellules adipeuses, tant par la régression des trachées intracellulaires que par le dépôt de vésicules graisseuses de plus en plus abondantes.

Les cellules trachéales sont intéressantes à divers points de vue : 1° biologiquement, il est remarquable que, parmi les Gastrides, l'Œstre du Cheval soit seul à les présenter, tandis que des espèces voisines (Hypoderme du Bœuf, Céphalomye du Mouton) en sont dépourvues ; il y a là un fait d'adaptation au mode de vie tout particulier des larves de l'Œstre du Cheval. 2° La signification

physiologique des cellules trachéales n'est pas douteuse ; elles appartiennent à cette catégorie physiologique de cellules qu'on a désignées sous le nom d'œnocytes, et comme les autres œnocytes se transforment ici en cellules adipeuses. La cellule trachéale ou œnocyte rouge représente le premier terme d'une évolution dont la cellule adipeuse est le second ; au premier stade la cellule est abondamment oxygénée par le développement des trachées ; au second, elle utilise sa provision d'oxygène pour fabriquer des matériaux de réserve graisseux ; la trachéisation des cellules de l'organe rouge a eu ici le même effet que la vascularisation du tissu adipeux des Vertébrés. 3° Au point de vue morphologique, les cellules de l'organe rouge doivent être considérées comme des éléments terminaux de la paroi des trachées, qui se sont hypertrophiés et à l'intérieur desquels des canaux trachéens se sont développés, sans doute par fusion longitudinale de vacuoles du cytoplasme.

Si l'on construit le schéma d'un appareil trachéen, en le compliquant par l'adjonction de cellules trachéales terminales semblables à celles de l'organe rouge, on est frappé de la ressemblance qu'offre la figure obtenue avec celle de glandes cutanées, telles que celles de l'urostyle du Cloporte. Ici, comme là, à un conduit excréteur limité de cellules plates fait suite une cellule sécrétrice à canaux intracellulaires, ces canaux ayant pris naissance sur place par différenciation du cytoplasme de l'élément sécréteur.

Différenciation des cils vibratiles sur les cellules de la granulosa dans des follicules ovariens kystiques, par MM. A. Prenant et P. Bouin.

Suivant l'idée classique, les cellules vibratiles sont des éléments définitivement fixés et irrévocablement différenciés ; elles dérivent de cellules embryonnaires qui fatalement sont vouées à la forme vibratile ; elles sont une espèce cellulaire, n'ayant avec les autres espèces de cellules épithéliales aucune parenté nécessaire. Les cils à leur tour sont considérés classiquement comme une formation cellulaire caractéristique de l'espèce « cellule vibratile » qui en a le privilège exclusif.

L'un de nous [1], s'associant aux idées exprimées par S. Mayer [2] sur la signification morphologique des cellules vibratiles, a été amené, en s'appuyant sur quelques faits soit personnels, soit surtout rapportés par les auteurs, à abandonner complètement la notion classique. La différenciation vibratile, au lieu d'avoir le caractère d'un phénomène nécessaire et durable, ne serait que l'effet contingent et transitoire de conditions extérieures particulières. Les épithéliums vibratiles ne naîtraient pas d'ébauches embryonnaires distinctes, d'ébauches à cellules vibratiles, mais se produiraient en un point quelconque de l'organisme, dans quelque organe que ce soit. Les cellules vibratiles, loin de persister indéfiniment sous leur forme première, pourraient se transformer en d'autres formes cellulaires qui reprendraient ensuite le caractère de cellules vibratiles, et ainsi de suite.

Nous indiquions, à l'appui de cette thèse : la succession dans un même épithélium en voie de développement de formes cellulaires ciliées et non ciliées ; l'apparition, la disparition, puis la réapparition des cellules vibratiles dans certaines circonstances physiologiques ; la transformation, dans des épithéliums tels que ceux de la trompe, de l'épididyme, du rein, de cellules pourvues de garnitures ciliées ou de bordures en brosse en cellules sécrétantes qui ne présentent plus ces appendices ; enfin la différenciation de cils vibratiles sur la paroi de cavités kystiques. Il arrive en effet fréquemment, soit au cours de l'évolution normale d'un organe, soit à la suite d'altérations pathologiques d'organes variés, que dans ces organes, qui ne présentaient pas auparavant d'épithélium cilié, des cavités kystiques se produisent, tapissées par une paroi épithéliale dont les cellules acquièrent des cils vibratiles, soit seulement en certains points, soit sur toute l'étendue de la paroi. C'est ainsi que l'un de nous a interprété les vésicules ciliées signalées par les auteurs chez différents Mammifères dans l'appareil thyroïdien, et constatées par lui chez les Reptiles. De la même façon, les kystes pathologiques garnis de cellules épithéliales vibratiles, situés dans des organes qui normalement chez

1. A. Prenant, « Cellules vibratiles et cellules à plateau. » (*Bibliographie anatomique*, t. VII. 1899.)

2. S. Mayer, « Zur Lehre von Flimmerepithel, etc. » (*Anat. Anzeiger*. Bd XIV, nos 2-3. 1897.)

l'adulte ne renferment pas d'éléments ciliés, s'expliqueront non pas en les faisant dériver, souvent très péniblement, de rudiments embryonnaires qui auraient persisté, mais en admettant, beaucoup plus facilement, que les cils vibratiles se différencient secondairement dans les formations kystiques pathologiques, sous des influences d'ailleurs encore inconnues, bien certainement en tout cas mécaniques ou chimiques.

Comme conclusion : « La cellule épithéliale ciliée naît de la transformation éventuelle d'un élément cellulaire épithélial quelconque. »

L'un de nous a fait récemment une observation qui apporte un argument nouveau et bien inattendu en faveur de la thèse dont il vient d'être question.

C'est dans plusieurs ovaires de Cobayes adultes que l'un de nous a fait les observations qui ont motivé le rappel et la confirmation définitive des considérations générales précédentes. La plupart de leurs ovisacs sont en pleine involution; parmi ceux-ci, les uns sont envahis par les cellules interstitielles de la couche interne de la théca et se transforment progressivement en faux corps jaunes, les autres sont en voie de transformation kystique. Le nombre de ces derniers est assez considérable et les stades de transition suffisamment abondants pour qu'il nous ait été possible de reconstituer avec certitude l'histoire de ce mode particulier d'atrésie folliculaire.

Les follicules de de Graaf peuvent être atteints par l'atrésie kystique à un stade quelconque de leur évolution, depuis le stade de follicules très jeunes constitués par un ovule peu volumineux entouré par une simple couche de cellules folliculeuses, jusqu'à celui de follicules tout à fait mûrs. Dans ces follicules, l'ovule et presque tous les éléments de la granulosa dégénèrent tout d'un coup, et cette dégénérescence doit être soudaine et rapide, car l'ovule ne montre pas ou montre très rarement ces manifestations d'aberration vitale qui précèdent sa disparition dans d'autres conditions d'involution atrésique. Pendant un certain temps, qui paraît être de courte durée, on peut constater dans la cavité de l'ovisac la présence des résidus cellulaires produits à la suite de cette nécrobiose ; ils disparaissent très vite sans laisser de traces. — Seule la couche la plus externe de la granulosa ne subit pas ce processus involutif; elle demeure en place sous la forme d'une

seule rangée d'éléments appliqués à la face interne de la membrane endothéliale de l'ovisac.

Tout d'abord cubiques et assez irréguliers, ces éléments se régularisent ensuite, deviennent cylindriques et se garnissent d'un appareil cilié dont les cils, assez longs, très fins, très réguliers, sont soutenus par des pièces basales typiques. Dans certains cas, qui sont loin d'être rares, l'épithélium est festonné, irrégulier, formé de cellules très hautes, dont les unes sont volumineuses et claires, tandis que les autres possèdent un corps cellulaire étroit, filiforme, comprimé entre les premières et un noyau entouré d'une mince zone protoplasmatique qui fait hernie à la surface de l'épithélium. On peut voir aussi 3, 4 et jusqu'à 5 cellules dont les corps protoplasmiques, appliqués les uns contre les autres, forment un étroit pédicule à peine visible entre ses volumineuses voisines, et dont les noyaux s'étalent en éventail à la surface de l'épithélium. Entre ces différentes espèces de cellules, on peut saisir tous les intermédiaires. Seuls, les éléments clairs et volumineux et les éléments cylindriques sont munis d'un appareil cilié ; les autres en sont dépourvus. Toutes ces cellules montrent des signes fréquents de division amitosique.

Les kystes ainsi formés peuvent avoir, dès le principe, toutes les dimensions comprises entre celles des follicules très jeunes et celles des follicules mûrs. Ils sont remplis d'un liquide coagulé par les réactifs employés pour la fixation. A la suite de l'augmentation de volume de ce liquide, les kystes peuvent arriver à atteindre des dimensions relativement considérables. D'après nos observations, les cellules qui tapissent la cavité kystique sont d'autant plus élevées et d'autant plus régulièrement cylindriques et ciliées que le kyste est plus jeune et se rapproche plus des dimensions de la cavité folliculaire qui lui a donné naissance. Elles perdent ces caractères en même temps que le kyste se développe ; dans les kystes assez volumineux, elles peuvent être très aplaties, sans doute sous l'effet de la pression excentrique exercée sur elles par le liquide intrakystique, et leur face interne ne présente plus de garniture ciliée. En même temps les différentes couches de la théca s'amincissent progressivement, les cellules interstitielles de la couche interne disparaissent, et la cavité kystique n'est bientôt plus entourée que par une zone étroite de tissu conjonctif ordinaire.

En résumé :

1° Les follicules de de Graaf, dans l'ovaire de Cobaye adulte, semblent dégénérer assez fréquemment par atrésie kystique, laquelle peut se manifester aussi bien sur des follicules très jeunes que sur des follicules en voie de développement ou que sur des follicules mûrs.

2° Cette dégénérescence kystique se réalise par la disparition en masse de l'ovule et de la granulosa. Seule la couche la plus externe de celle-ci demeure en place contre la face interne de la membrane endothéliale folliculaire. Ces cellules granuleuses se multiplient activement par voie amitosique, se transforment en cellules cylindriques et se garnissent d'un appareil cilié.

3° L'observation précédente apporte un argument décisif aux conclusions déjà formulées par l'un de nous dans un précédent travail, à savoir : « Que la cellule épithéliale ciliée naît de la transformation éventuelle d'un élément cellulaire épithélial quelconque. » Rien d'aussi dissemblable, biologiquement, que la cellule folliculeuse, sexuelle et nourricière, et la cellule cylindrique ciliée, organe de revêtement et de protection. Et cependant nous avons vu la première se transformer en la seconde dans certaines conditions que nous avons analysées. C'est là, croyons-nous, un exemple frappant des flexions morphologiques étendues que peuvent subir les éléments cellulaires et une démonstration évidente de la contingence de l'appareil cilié.

Contractions fibrillaires des veines caves des mammifères adultes (Note préliminaire), par M. E. Meyer.

I. — Les contractions fibrillaires bien connues que l'on observe, à la suite de l'excitation directe, dans les parois des ventricules et dans celles des oreillettes, peuvent être provoquées également, sous l'action du courant électrique, dans les veines caves, supérieure et inférieure, au voisinage du cœur, chez les mammifères adultes (chiens et lapins). Réciproquement les mêmes contractions se produisent dans les veines par excitation de la surface de l'une des deux oreillettes.

Les parois des veines réagissent dans ces conditions comme le

cœur ; certaines propriétés du système cardiaque s'étendent donc au delà des limites du cœur lui-même, dans les vaisseaux veineux, et paraissent être une persistance, chez le mammifère adulte, d'un état voisin de l'état embryonnaire.

La région dans laquelle l'excitation électrique provoque ces mouvements fibrillaires correspond à celle où l'on observe des battements veineux spontanés.

II. — De plus, l'apparition de contractions fibrillaires dans les veines entraîne l'apparition de ces mêmes mouvements dans les deux oreillettes et dans les ventricules.

Ce phénomène pourrait être dû à la diffusion du courant électrique. On démontre qu'il n'en est rien, en plaçant les deux bouts périphériques des nerfs phréniques sectionnés sur divers points du myocarde ; on constate alors que les contractions fibrillaires du cœur, provoquées par l'excitation des veines, ne s'accompagnent pas de contractions du diaphragme, ce qui devrait se produire si, dans les conditions de l'expérience, il y avait diffusion du courant électrique à la surface du cœur. La folie du cœur, dans ces conditions, est donc un phénomène d'ordre physiologique en rapport étroit avec les contractions fibrillaires provoquées dans les veines par l'excitation électrique de ces dernières.

L'analyse expérimentale de ce dernier fait peut être utile dans la question si discutée de la détermination du siège et de la nature de l'automatisme du cœur. (Engelmann, Fano et Bottazzi.)

Nancy, imprimerie Berger-Levrault et Cie.